DIKTAT

ALJABAR LINEAR I

Oleh:
Dr. I Wayan Widana, S.Pd., M.Pd.

INSTITUT KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
(IKIP) PGRI BALI
2018

KATA PENGANTAR

Segala puja dan puji syukur dipanjatkan kehadapan Ida Sang Hyang Widhi Wasa/Tuhan Yang Maha Esa, karena berkat rahmat-Nya diktat dengan judul "ALJABAR LINIER I" dapat diselesaikan sesuai dengan rencana. Diktat ini disusun untuk memperkaya sumber belajar mahasiswa ketika mengikuti perkuliahan Aljabar Linear I.

Terwujudnya diktat ini atas bantuan dan motivasi berbagai pihak. Oleh karena itu, ucapan terima kasih yang setulus-tulusnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya disampaikan kepada:

1. Dr. I Made Suarta, S.H., M.Hum., selaku Rektor IKIP PGRI Bali, yang selalu memotivasi agar bahan ajar ini segera diwujudkan dan dapat digunakan dalam perkuliahan.
2. Rekan–rekan dosen pada Program Studi Pendidikan Matematika FPMIPA IKIP PGRI Bali.
3. Mahasiswa jurusan Pendidikan Matematika yang selalu mendorong agar bahan ajar ini dapat segera diwujudkan.

Dengan segala kerendahan hati, kritik dan saran yang konstruktif dari berbagai pihak sangat diharapkan untuk penyempurnaan diktat ini. Akhirnya dengan segala keterbatasan yang ada, diktat ini dipersembahkan untuk menambah wawasan keilmuan dan meningkatkan mutu pendidikan khususnya bagi civitas akademika FPMIPA IKIP PGRI Bali.

Denpasar, 1 September 2018

Penyusun

DAFTAR ISI

TINJAUAN DIKTAT

Aljabar Linear I merupakan salah satu mata kuliah wajib bagi mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika S1 sebelum mengikuti mata kuliah Aljabar Linear II. Diktat Aljabar Linear I secara khusus membahas tentang matriks dan sistem persamaan linear. Oleh karena itu prasyarat untuk mengikuti mata kuliah Aljabar Linear I adalah mahasiswa telah lulus mata kuliah Aljabar.

Diktat Aljabar Linear I disusun dengan tujuan sebagai berikut.
1. Membantu membekali mahasiswa dengan outline materi perkuliahan, sehingga memudahkan mahasiswa mendapatkan literatur lain yang relevan.
2. Sebagai salah satu sumber belajar yang dapat digunakan oleh mahasiswa selama mengikuti perkuliahan Aljabar Linier I.
3. Memotivasi mahasiswa agar mempersiapkan diri lebih awal di rumah sebelum mengikuti perkuliahan di kampus.

Diktat Aljabar Linear I disarikan dari materi perkuliahan yang telah diajarkan beberapa tahun sebelumnya. Penyajian diktat disesuaikan dengan kebutuhan perkuliahan, sehingga dikemas dalam bentuk paket-paket pertemuan yang terdiri atas 13 kali pertemuan. Masing-masing paket pertemuan terdiri atas tujuan perkuliahan, materi perkuliahan, dan latihan. Anda wajib membaca diktat ini secara berurutan mulai dari materi yang disajikan pada pertemuan pertama. Setelah menguasai materi pada pertemuan pertama barulah mulai membaca materi pada pertemuan kedua, dan seterusnya. Anda tidak diperkenankan mempelajari diktat ini secara lompat-lompat (acak), karena materi sebelumnya merupakan prasyarat untuk materi berikutnya.

Paket-paket pertemuan yang disajikan dalam diktat ini adalah sebagai berikut.
- Pertemuan ke-1 membahas tentang definisi, notasi, dan kesamaan dua matriks.
- Pertemuan ke-2 membahas tentang operasi dasar matriks, penjumlahan, pengurangan, perkalian skalar dengan matriks, sifat-sifat penjumlahan dan perkalian skalar dengan matriks.
- Pertemuan ke-3 membahas tentang perkalian matriks, sifat-sifat perkalian matriks, dan transpose matriks.
- Pertemuan ke-4 membahas tentang jenis-jenis matriks khusus.

- Pertemuan ke-5 membahas tentang transformasi elementer dan matriks ekuivalen.
- Pertemuan ke-6 membahas tentang rank matriks.
- Pertemuan ke-7 membahas tentang determinan matriks ordo 2x2, determinan matriks ordo 3x3, sifat-sifat determinan, dan implikasi sifat-sifat determinan.
- Pertemuan ke-8 membahas tentang minor, kofaktor, dan Teorema Laplace.
- Pertemuan ke-9 membahas tentang menentukan determinan matriks menggunakan sifat-sifat determinan.
- Pertemuan ke-10 membahas tentang adjoint dan invers matriks.
- Pertemuan ke-11 membahas tentang Sistem Persamaan Linier (SPL).
- Pertemuan ke-12 membahas tentang Penyelesaian SPL.
- Pertemuan ke-13 membahas tentang Metode Cramer.

Sebelum memulai membaca bahan ajar ini lebih lanjut, mahasiswa diharapkan membaca tujuan perkuliahan terlebih dahulu. Dengan demikian setelah mengikuti perkuliahan, mahasiswa dapat melakukan evaluasi diri untuk mengetahui apakah tujuan perkuliahan sudah dicapai atau belum. Selanjutnya pada bagian materi perkuliahan berisi ringkasan materi dan contoh soal serta pembahasannya sesuai dengan tujuan perkuliahan yang telah ditentukan. Latihan diberikan pada setiap akhir perkuliahan. Mahasiswa agar mengerjakan soal-soal latihan dengan sungguh-sungguh untuk mendapatkan umpan balik terhadap penguasaan materi yang telah dipelajari.

Agar diktat ini dapat digunakan secara efektif dan efisien, kepada mahasiswa diharapkan mencari buku-buku penunjang lainnya sesuai dengan kebutuhan. Materi yang disajikan dalam diktat ini sangat padat dan ringkas, sehingga mahasiswa sangat dianjurkan mendiskusikan diktat ini secara berkelompok. Dengan demikian, kehadiran diktat ini diharapkan dapat membantu mahasiswa untuk memahami materi dasar yang dibutuhkan dalam menguasai materi perkuliahan Aljabar Linear I.

Selamat mengikuti perkuliahan Aljabar Linear I, semoga diktat ini memberikan manfaat kepada semua pembaca.

Pertemuan ke-1
MATRIKS

A. Tujuan Perkuliahan

Mahasiswa dapat:

1) menyebutkan pengertian matriks
2) menuliskan notasi matriks
3) menyebutkan ordo matriks
4) menyebutkan elemen matriks pada baris dan kolom tertentu (a_{ij})
5) menentukan syarat dua matriks dikatakan sama

B. Materi Perkuliahan

1) Pengertian matriks
2) Notasi matriks
3) Kesamaan dua matriks

DEFINISI MATRIKS

Matriks adalah himpunan skalar (bilangan riil atau kompleks) yang disusun/dijajarkan berbentuk persegi panjang (menurut baris dan kolom). Skalar-skalar itu disebut elemen matriks.

NOTASI MATRIKS

Matriks ditulis dengan huruf kapital A, B, C dan sebagainya, secara lengkap ditulis A = (a_{ij}) artinya suatu matriks A yang elemen-elemennya a_{ij}. Dimana indeks i menyatakan baris ke-i dan indeks j menyatakan kolom ke-j dari elemen tersebut.Penulisan matriks dibatasi oleh kurung siku [ ] atau kurung biasa ( ).

Secara umum dapat dituliskan sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriks A di atas dapat dituliskan A(mxn) = (aij). Dengan mxn disebut ORDO MATRIKS.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 12 \\ 6 & 3 & 7 & 10 \\ 11 & 8 & -5 & 21 \\ 24 & 4 & 5 & 15 \end{bmatrix}$$

Matriks A berordo 4x4, dengan a_{12} = -1, a_{22} = 3, a_{34} = 21, a_{43} = 15 dan seterusnya.

KESAMAAN DUA MATRIKS

Dua matriks A = (a_{ij}) dan B = (b_{ij}) dikatakan sama bila ordonya sama (mxn) dan berlaku a_{ij}= b_{ij}.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 7 & -2 \\ 1 & 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{3}{3} & -1 & 0 & \sqrt{4} \\ 6 & \frac{9}{3} & 7 & -2 \\ 1 & 8 & -5 & 1 \\ \sqrt[3]{64} & 0 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

Matriks A=B karena untuk setiap matriks A=(a_{ij}) sama dengan B=(b_{ij}).

LATIHAN 1

1. Diketahui matriks: P=$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 2 & -5 \\ 4 & 1 & 9 & 7 & -6 \\ 8 & -4 & -8 & 12 & 10 \end{bmatrix}$ dan

   Q=$\begin{bmatrix} 11 & 1/2 & -6 & 31 & -8 & 16 \\ -21 & 0{,}4 & \sqrt{3} & 1{,}34 & 1+\sqrt[3]{5} & 52 \end{bmatrix}$

   Tentukan:
   a. Ordo matriks P
   b. Ordo matriks Q
   c. Elemen kolom ke-3 matriks P
   d. Elemen baris ke-1 matriks P
   e. Elemen kolom ke-5 matriks Q
   f. Elemen baris ke-2 matriks Q
   g. Pada matriks P: e_{21}, e_{32}, e_{34}, e_{24}, e_{13}, dan e_{15}
   h. Pada matriks Q: e_{12}, e_{22}, e_{23}, e_{25}, dan e_{16}

2. Buatlah sebuah matriks K ordo 5x6 dan L berordo 4x7, kemudian tentukan:
   a. Elemen kolom ke-3 matriks K
   b. Elemen baris ke-2 matriks L
   c. Elemen kolom ke-5 matriks K
   d. Elemen baris ke-4 matriks L
   e. Pada matriks K: e_{42}, e_{32}, e_{34}, e_{24}, e_{13}, dan e_{52}
   f. Pada matriks L: e_{33}, e_{42}, e_{36}, e_{27}, e_{17}, dan e_{47}

3. Diketahui $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 2 & x_1 & 6 \\ -1 & 2 & x_2+3 \end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix} x_3+1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 0{,}5x_4 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

   Carilah x_1, x_2, x_3, dan x_4.

4. Carilah harga x, y, z, dan u bila:

   $\begin{bmatrix} 3x & 0{,}5y \\ 2z & u \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} x & y+1 \\ 5 & z+1 \end{bmatrix}$ +$\begin{bmatrix} 5 & 2+y \\ 0{,}25z & 4 \end{bmatrix}$

****

Pertemuan Ke-2

OPERASI DASAR MATRIKS

A. Tujuan Perkuliahan

Mahasiswa dapat:

1) melakukan operasi penjumlahan dan pengurangan matriks
2) menyebutkan sifat-sifat penjumlahan dan pengurangan matriks
3) menentukan hasil kali skalar dengan matriks

B. Materi Perkuliahan

1) Penjumlahan dan pengurangan matriks dan sifat-sifatnya
2) Hasil kali skalar dan matriks

PENJUMLAHAN

Bila matriks A = (a_{ij}) dan B = (b_{ij}) berordo sama, maka A + B = C(c_{ij}). Dimana $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ untuk setiap i dan j (i = 1, 2, 3, ..., m; dan j = 1, 2, 3, ...,n).

PENGURANGAN

Bila matriks A = (a_{ij}) dan B = (b_{ij}) berordo sama, maka A - B = C(c_{ij}).

Dimana $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ untuk setiap i dan j (i = 1, 2, 3, ..., m; dan j = 1, 2, 3, ...,n).

Contoh :

Bila A = $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 10 & 1 \\ 6 & 4 & 7 & 2 \\ 11 & 8 & 9 & 21 \\ -24 & 4 & 5 & 15 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 12 & -10 & 0 & 12 \\ 26 & 3 & 71 & 10 \\ 14 & 80 & -5 & 21 \\ 4 & 4 & -5 & 5 \end{bmatrix}$

Tentukan :

a) A + B
b) B - A

Jawab:

a) $A + B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 10 & 1 \\ 6 & 4 & 7 & 2 \\ 11 & 8 & 9 & 21 \\ -24 & 4 & 5 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & -10 & 0 & 12 \\ 26 & 3 & 71 & 10 \\ 14 & 80 & -5 & 21 \\ 4 & 4 & -5 & 5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 15 & -11 & 10 & 13 \\ 32 & 7 & 78 & 12 \\ 25 & 88 & 4 & 42 \\ -20 & 8 & 0 & 20 \end{bmatrix}$

b) $B - A = \begin{bmatrix} 12 & -10 & 0 & 12 \\ 26 & 3 & 71 & 10 \\ 14 & 80 & -5 & 21 \\ 4 & 4 & -5 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 & 10 & 1 \\ 6 & 4 & 7 & 2 \\ 11 & 8 & 9 & 21 \\ -24 & 4 & 5 & 15 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 9 & -9 & -10 & 11 \\ 20 & -1 & 64 & 8 \\ 3 & 72 & -14 & 0 \\ 28 & 0 & -10 & -10 \end{bmatrix}$

PERKALIAN SKALAR TERHADAP MATRIKS

Bila λ suatu skalar (bilangan) danA = (a_{ij}), maka matriks λA = (λa_{ij}).

Misalkan: A = $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$ maka 2A = $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 20 & 24 \end{pmatrix}$; $\frac{1}{2}$A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

SIFAT-SIFAT PENJUMLAHAN DAN PERKALIAN SKALAR

Bila A, B, C dan D matriks-matriks berordo sama dan λ suatu skalar maka berlaku:

1. A + B = B + A (sifat komutatif)
2. (A + B) + C = A + (B + C) (sifat asosiatif)
3. λ(A + B) = λ A + λB (sifat distributif)
4. Selalu ada matriks D sedemikian sehingga A + D = B

LATIHAN 2

1. Diketahui matriks A=$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, B=$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 & -2 \\ 6 & 10 & 0 & -6 \\ 8 & 4 & 4 & 12 \\ 3 & 6 & -12 & 2 \end{bmatrix}$ dan

   C=$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 9 \\ -2 & 2 & 1 & 10 \\ 4 & 6 & 7 & -5 \\ -3 & 7 & 8 & 2 \end{bmatrix}$

   Tentukan:

   a. 3A + ½ B – 2C
   b. 2A – 4B +3C
   c. 4A + (3B-C)
   d. (A – B) – (2B+C)

2. Buatlah matriks P, Q dan R masing-masing berorodo 5x5 kemudian tentukan:

   a. 2P + (Q -2R)
   b. P – 4R +3Q
   c. 3P + (2R-Q)
   d. 2(P + 2Q) – 3(Q-2R)

******

Pertemuan Ke-3

PERKALIAN DAN TRANSPOSE MATRIKS

A. Tujuan Perkuliahan

Mahasiswa dapat:

1) melakukan operasi perkalian matriks
2) menyebutkan sifat-sifat perkalian matriks
3) menentukan transpose suatu matriks

B. Materi Perkuliahan

1) Perkalian matriks dan sifat-sifatnya
2) Transpose suatu matriks

PERKALIAN MATRIKS

Syarat perkalian matriks

Dua matriks A dan B dapat dikalikan bila banyaknya *kolom* matriks pertama sama dengan banyaknya *baris* matriks kedua.

DEFINISI

Misalkan A = (a_{ij}) berukuran p x q dan B = (b_{ij}) berukuran q x r. Maka AB=C(c_{ij}) berukuran p x r dimana:

$c_{ij}= a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots + a_{iq}\, b_{qj}$ untuk setiap i =1, 2, 3,...,p dan j=1, 2, 3,..., r.

Contoh

Misalkan: A = $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ dan B = $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$. Ordo matriks A adalah 2x3 dan ordo matriks B adalah 3x1. Maka AB = C(c_{ij}) berordo 2x1, dimana C(c_{ij})=$\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}$.

c11 = a11.b11 + a12.b21 + a13.b31

c21 = a21.b11 + a22.b21 + a23.b31

Jadi AB = $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.6 + 2.8 + 0.(-4) \\ 1.6 + 4.8 + 5.(-4) \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 34 \\ 6 \end{pmatrix}$

SIFAT-SIFAT PERKALIAN MATRIKS

Bila A, B, dan C matriks-matriks yang memenuhi syarat-syarat perkalian matriks, maka:

1. A(B + C) = AB + AC (sifat distributif)
2. (B + C)A = BA + CA (sifat distributif)
3. A(BC) = (AB)C (sifat asosiatif)
4. AB ≠ BA (pada umumnya tidak komutatif)
5. Bila AB = 0 (matriks nol yaitu matriks yang semua elemennya nol) maka kemungkinan-kemungkinannya:
    a. A=0; B=0
    b. A=0; B≠0
    c. A≠0; B=0
    d. A≠0; B≠0
6. Bila AB = AC belum tentu B = C

Buatlah masing-masing sebuah contoh untuk sifat-sifat di atas.

TRANSPOSE SUATU MATRIKS

Misalkan A = (a_{ij}) berordo mxn, maka transpose dari matriks A ditulis A^T berordo nxm yang didapat dari A dengan menuliskan elemen dari baris ke-i menjadi kolom ke-j darimatriks A^T. Dengan perkataan lain $A^T = (a_{ji})$.

Contoh :

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ maka $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

Sifat-sifat transpose matriks

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$
2. $(A^T)^T = A$
3. $\lambda(A^T) = (\lambda A)^T$
4. $(AB)^T = B^T.A^T$

Buat masing-masing sebuah contoh untuk sifat-sifat di atas.

LATIHAN 3

1. Diketahui matriks A=$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & -5 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 10 & 3 \end{bmatrix}$, B=$\begin{bmatrix} 0 & -4 & 5 & -2 \\ 6 & 4 & 0 & -6 \\ 8 & 4 & 7 & 3 \\ -4 & 6 & -12 & 2 \end{bmatrix}$ dan

   C=$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 & 4 \\ -2 & 6 & 1 & 5 \\ 4 & -8 & 7 & -5 \\ -3 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   Tentukan:

   a. (2A + ½ B)(B – 2C)

   b. (A^T – $3B^T$)(A + C)

   c. ($4A^2$ + B^2)($2B^T$-$3C^T$)

2. Buatlah matriks P, Q dan R masing-masing berorodo 4x4 kemudian tentukan:

   a. (2P + ½ Q)(R – 3P)

   b. (R^T – $3Q^T$)(P + Q)

   c. ($3P^2$ + R^2)(R^T-$2Q^T$)

3. Jika A dan B adalah matriks, buktikan bahwa $(AB)^T = B^T.A^T$

****

Pertemuan Ke-4

MATRIKS KHUSUS

A. Tujuan Perkuliahan

Mahasiswa dapat:

1) menyebutkan ciri-ciri matriks khusus.
2) membuat contoh-contoh matriks khusus
3) menyebutkan sifat-sifat matriks khusus

B. Materi Perkuliahan

Matriks khusus dan sifat-sifatnya

BEBERAPA JENIS MATRIKS KHUSUS

1. Matriks Bujursangkar (persegi)

Matriks yang banyak baris dan kolomnya sama, sehingga ordonya nxn. Elemen a_{11}, a_{22}, a_{33},..., a_{nn} disebut elemen diagonal utama.

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

2. Matriks Diagonal

Matriks bujursangkar yang semua elemen di luar diagonal utamanya nol. A = (a_{ij}) merupakan matriks diagonal bilaa_{ij} = 0 untuk i ≠ j.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

3. Matriks Satuan (Identitas)

Matriks diagonal yang semua elemen diagonal utamanya sama dengan 1.A = (a_{ij}) merupakan matriks satuan (identitas) bilaa_{ij} = 1 untuk i = j, dan a_{ij} = 0 untuk i ≠ j. Matriks identitas biasanya ditulis I_n. n menunjukkan ordo matriks identitas. Sifat matriks identitas AI = IA = A.

Contoh :

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Matriks Skalar

   Matriks diagonal yang semua elemen diagonal utamanya sama dengan k. Matriks I_n adalah matriks skalar dengan k = 1.

5. Matriks Segitiga Atas

   Matriks bujursangkar yang semua elemen di bawah diagonal utamanya nol. A = (a_{ij}) merupakan matriks segitiga atas bilaa_{ij} = 0 untuk i > j.

   Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 12 & -10 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

6. Matriks Segitiga Bawah

   Matriks bujursangkar yang semua elemen di atas diagonal utamanya nol. A = (a_{ij}) merupakan matriks segitiga bawah bilaa_{ij} = 0 untuk i < j.

   Contoh :

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 0 \\ 11 & 8 & 9 & 0 \\ -24 & 4 & 5 & 15 \end{bmatrix}$$

7. Matriks Simetris

   Matriks bujursangkar yang transposenya sama dengan dirinya sendiri. A^T=A

   Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix};\ A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Matriks Antisimetris

   Matriks bujursangkar yang transposenya sama dengan negatif dirinya sendiri. A^T = -A

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix};\ A^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -A$$

9. Matriks Nol

   Matriks yang semua elemennya nol. Sifat-sifatnya: A.0 = 0.A = 0

10. Matriks Komutatif

    Bila A dan B matriks bujursangkar dan berlaku AB = BA. Sedangkan bila AB = -BA disebut matriks antikomutatif.

    Contoh :

    $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ maka,

    $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ dan

    $BA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

11. Matriks Idempoten, Periodik, dan Nilpoten

    Bila berlaku A.A.A = A^3 = A maka matriks A dikatakan matriks idempoten. Secara umum bila A.A...A = A^p = A dikatakan matriks A periodik dengan periode p-1. Sedangkan bila A^r = 0 dikatakan matriks A nilpoten dengan indeks r.

    Contoh:

    $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ nilpoten dengan indeks r = 3 sebab A^3 = 0

LATIHAN 4

1. Buktikan bahwa jika A adalah suatu matriks bujursangkar maka ($A+A^T$) adalah matriks simetris.

2. Diketahui A=$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, tentukan:
   a. A^2 dan A^3
   b. Jika $f(x)=x^3-3x^2-2x+4$; carilah f(A).

3. Selidikilah, apakah matriks A =$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ dan B =$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ merupakan matriks komutatif?

4. Buatlah matriks P dan Q masing-masing ordo 2 agar merupakan matriks komutatif.

5. Selidikilah, apakah matriks A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ dan B = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ matriks antikomutatif? Apah berlaku $(A+B)^2=A^2+B^2$?

6. Apakah matriks A=$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ matriks periodik?. Bila periodik, berapa periodenya?

7. Apakah matriks A=$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ matriks nilpoten?

8. Buatlah sebuah contoh matriks nilpoten.

9. Buatlah sebuah contoh matriks idempoten.

****

Pertemuan Ke-5

TRANSFORMASI ELEMENTER DAN MATRIKS EKUIVALEN

A. Tujuan Perkuliahan

Mahasiswa dapat:

1) menyebutkan jenis-jenis transformasi elementer.
2) menyebutkan sifat-sifat transformasi elementer dan akibatnya.
3) melakukan transformasi elementer terhadap baris atau kolom.
4) menentukan matriks-matiriks yang saling ekuivalen.
5) menentukan matriks asal bila diketahui matriks ekuivalen setelah dilakukan beberapa kali transformasi elementer terhadap suatu matriks.

B. Materi Perkuliahan

1) Transformasi elementer
2) Matriks Ekuivalen

TRANSFORMASI ELEMENTER

Yang dimaksud transformasi elementer pada baris/kolom suatu matriks A adalah sebagai berikut.

1) Penukaran tempat baris ke-i dan baris ke-j (baris ke-i dijadikan baris ke-j dan baris ke-j dijadikan baris ke-i), ditulis H_{ij} (A).

   Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 8 & 6 & 10 \end{pmatrix} \text{ maka } H_{12}\,(A) = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 8 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

   Penukaran tempat kolom ke-i dan kolom ke-j (kolom ke-i dijadikan kolom ke-j dan kolom ke-j dijadikan kolom ke-i), ditulis K_{ij} (A).

   Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 8 & 6 & 10 \end{pmatrix} \text{ maka } K_{12}\,(A) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

2) Mengalikan baris ke-i dengan skalar $\lambda \neq 0$, ditulis ${H_i}^{\lambda}$(A).

   Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 8 & 6 & 10 \end{pmatrix} \text{ maka } {H_2}^{(-2)}(A) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -10 & -6 & -2 \\ 8 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Mengalikan kolom ke-i dengan skalar $\lambda \neq 0$, ditulis K_i^{λ}(A).

Contoh:

A = $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 8 & 6 & 10 \end{pmatrix}$ maka $K_1^{(-1)}$(A) = $\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ -5 & 3 & 1 \\ -8 & 6 & 10 \end{pmatrix}$

3) Menambah baris ke-i dengan λ kali baris ke-j ditulis H_{ij}^{λ}(A).

Contoh:

A = $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 8 & 6 & 10 \end{pmatrix}$ maka $H_{23}^{(1)}$(A) = $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 13 & 9 & 11 \\ 8 & 6 & 10 \end{pmatrix}$

Menambah kolom ke-i dengan λ kali kolom ke-j ditulis K_{ij}^{λ}(A).

Contoh:

A = $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 8 & 6 & 10 \end{pmatrix}$ maka $H_{21}^{(3)}$(A) = $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 17 & 3 & -5 \\ 8 & 6 & 10 \end{pmatrix}$

Catatan:

Kadang-kadang operasi 2) dan 3) dilakukan secara bersama-sama. Sehingga operasinya dapat dilakukan sebagai berikut.

4) Menambah λ kali baris ke-i dengan μ kali baris ke-j ditulis $H_i{}^{\lambda}{}_j{}^{\mu}$(A).

Contoh:

A = $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 8 & 6 & 10 \end{pmatrix}$ maka $H_1{}^{(2)}2^{(1)}$(A) = $\begin{pmatrix} 13 & 3 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \\ 8 & 6 & 10 \end{pmatrix}$

5) Menambah λ kali kolom ke-i dengan μ kali kolom ke-j ditulis $K_i{}^{\lambda}{}_j{}^{\mu}$(A).

Contoh:

A = $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 8 & 6 & 10 \end{pmatrix}$ maka $K_2{}^{(-1)}3^{(2)}$(A) = $\begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 8 & 14 & 10 \end{pmatrix}$

Misalkan kita telah mengetahui bahwa matriks B sebagai hasil transformasi elementer dari A. Kita dapat mencari matriks A, disebut invers dari transformasi elementer.

Contoh:

B = $H_{31}{}^{(1)}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 8 & 14 & 10 \end{pmatrix}$ maka A = $H_{31}{}^{(1)^{-1}}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 4 & 18 & 12 \end{pmatrix}$

MATRIKS EKUIVALEN

Matriks A disebut ekuivalen dengan B ditulis A $\sim$ B, bila matriks A dapat diperoleh dari B atau matriks B dapat diperoleh dari matriks A dengan transformasi elementer. Bila transformasi elementer hanya dilakukan pada baris saja, dikatakan ekuivalen baris. Sedangkan bila transformasi elementer pada kolom saja disebut ekuivalen kolom.

Contoh:

1) A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$dan B = $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ merupakan matriks ekuivalen baris karena B = H_{12} (A).

2) A = $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ dan B =$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ merupakan matriks ekuivalen sebab:

A =
$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim K_{12}{}^{(1)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim K_{42}{}^{(-1)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim H_{12} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
= B

LATIHAN 5

1. Tentukan : H_{12}, K_{13}, $H_2^{(-2)}$, $K_3^{(2)}$, $H_{31}^{(1)}$, $K_{21}^{(2)}$, $H_2^{(1)}{}_3^{(2)}$ dari matriks-matriks berikut.

   a. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

   b. $B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

2. Misalkan $B = H_{31}^{(1)}(A) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}$, tentukan matriks A!

3. Diketahui $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, matriks B dihasilkan dari sederetan transformasi elementer $H_{31}^{(-1)}$,$H_2^{(2)}$,H_{12},$K_{41}^{(1)}$, $K_3^{(2)}$ terhadap A. Tentukan matriks B!

4. Matriks $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, diperoleh dari matriks Adengan sederetan transformasi elementer berturut-turut H_{12},$H_{31}^{(1)}$,K_{13}, $K_2^{(2)}$ terhadap A. Tentukan matriks A.

5. Selidikilah, apakah matriks A dan B berikut ekuivalen?

a. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c. $A=\begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

****

Pertemuan Ke-6

RANK MATRIKS

A. Tujuan Perkuliahan

Mahasiswa dapat:

1) menentukan langkah-langkah menentukan rank suatu matriks.
2) menentukan rank suatu matriks menggunakan transformasi elementer.
3) menggunakan rank matriks dalam pemecahan masalah.

B. Materi Perkuliahan

RANK MATRIKS

Rank matriks A, ditulis r (A) adalah dimensi suatu matriks yang menyatakan banyak maksimum vektor-vektor baris/kolom yang bebas linier.

Rank suatu matriks dapat ditentukan dengan langkah-langkah sebagai berikut.

a) Jika matriks A hanya terdiri dari dua baris, cukup diperiksa apakah kedua baris tersebut berkelipatan. Jika tidak berkelipatan (bebas linier) maka r (A) = 2, sedangkan bila berkelipatan maka r (A) = 1.

   Contoh:

   A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, jelas tidak berkelipatan, maka r (A) = 2.

   A = $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix}$, berkelipatan, maka r (A) = 1

b) Secara umum:

   1. Pilih salah satu baris yang bukan vektor nol, untuk mudahnya kita beri tanda (*) pada salah satu elemen yang nilainya 1 atau -1, yang selanjutnya disebut *elemen pivot*. Pada contoh di bawah, kita pilih baris ke-1 sebagai baris pivot, elemen pivot a_{13} = 1
   2. Jadikan nol semua elemen yang sekolom dengan elemen pivot, dengan transformasi elementer. Pada contoh, a_{23}, a_{33} dan a_{43} dijadikan nol.

3. Sekarang kita tidak perlu memperhatikan lagi baris pivot di atas (pada contoh baris ke-1), perhatikan baris-baris yang tinggal yaitu baris ke-2, ke-3 dan ke-4. Kerjakan langkah 1), 2) dan 3) terhadap mereka. Pada contoh dipilih baris ke-4 sebagai baris pivot (*), a_{41} = 1 dijadikan elemen pivot. a_{31} dan a_{21} dijadikan nol.
4. Pekerjaan ini kita akhiri jika langkah 1) tidak dapat dikerjakan lagi, yaitu semua baris telah bertanda (*) dan atau menjadi baris nol. Rank matriks tersebut adalah banyak semua baris dikurangi banyak baris yang menjadi baris nol.

Contoh:

Tentukan rank matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Jawab :

A = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1* & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix} \sim H_{21^{(-1)}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix} \sim$

$H_{31^{(-2)}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ -1 & -7 & 0 & -7 \\ 1* & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

$\sim H_{34^{(1)}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix} \sim H_{23^{(-1)}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ Jadi r (A) = 3.

Catatan:

Rank matriks di atas dapat pula dicari menggunakan secara kolom. Pada petunjuk di atas kata baris diganti dengan kata kolom dan sebaliknya.

LATIHAN 6

Tentukan rank matriks berikut.

1. A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \end{bmatrix}$

2. B = $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

3. C = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 9 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

4. D = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 14 & 3 & 13 \\ 4 & 2 & 10 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

5. E = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 11 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 11 & 25 & 4 & 6 \\ 1 & 21 & 31 & 8 & 2 \\ 4 & 32 & 56 & 12 & 8 \end{bmatrix}$

******

Pertemuan Ke-7

DETERMINAN MATRIKS DAN SIFAT-SIFATNYA

A. Tujuan Perkuliahan

Mahasiswa dapat:

1) menentukan determinan matriks ordo 2x2 dan 3x3.
2) merumuskan sifat-sifat determinan matriks.

B. Materi Perkuliahan

1) Determinan matriks ordo 2x2 dan 3x3
2) Sifat-sifat determinan

DETERMINAN MATRIKS ORDO 2X2

Jika A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, maka determinan A ditulis |A| = $a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$.

Contoh:

A = $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, maka |A| = 4.5 – (-2.1) = 20+2 = 22

DETERMINAN MATRIKS ORDO 3X3

Jika A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, untuk menghitung determinan matriks ordo 3x3 dapat menggunakan cara *Sarrus* sebagai berikut.

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & (-) & (-) & (-) \\
|A| = & \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right. & \left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array} \right. \\
 & & & (+) & (+) & (+)
\end{array}
$$

$|A| = a_{11}.a_{22}.a_{33}+a_{12}.a_{23}.a_{31}+a_{13}.a_{21}.a_{32} - (a_{31}.a_{22}.a_{13}+a_{32}.a_{23}.a_{11}+a_{33}.a_{21}.a_{12})$

Contoh:

Tentukan determinan matriks berikut!

A = $\begin{pmatrix} 31 & 22 & 12 \\ 6 & 6 & -4 \\ 5 & 13 & 3 \end{pmatrix}$

Jawab:

$$|A| = \begin{vmatrix} 31 & 22 & 12 \\ 6 & 6 & -4 \\ 5 & 13 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 31 & 22 \\ 6 & 6 \\ 5 & 13 \end{matrix}$$

= 31.6.3 + 22.(-4).5 + 12.6.13 – [5.6.12+ 13.(-4).31 + 3.6.22] = 1943

SIFAT-SIFAT DETERMINAN

Determinan matriks memiliki sifat-sifat tertentu, yang dapat memudahkan Anda untuk menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan matriks. Untuk mengetahui sifat-sifat determinan matriks lebih lanjut, Anda diminta mengerjakan semua soal yang ada dalam Latihan 7 berikut. Setiap soal akan memberikan sifat-sifat tertentu, sehingga Anda diwajibkan mengerjakan seluruh soal yang diberikan. Kesimpulan yang Anda peroleh setelah mengerjakan Latihan 7, merupakan sifat-sifat determinan yang tidak dinyatakan secara eksplisit dalam uraian ini. Selamat mengerjakan!

LATIHAN 7

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan singkat dan jelas, kemudian rumuskan simpulan yang diperoleh berdasarkan hasil yang diperoleh dari mengerjakan latihan berikut!

1. Tentukan determinan matriks-matriks berikut.

   a) $\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 3 \\ 2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} t-2 & 2 \\ -4 & t-1 \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} a-5 & 7 \\ -1 & t+3 \end{bmatrix}$

   d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

   e) $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

   f) $\begin{bmatrix} 1/2 & -1 & -1/3 \\ 3/4 & 1/3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

   g) $\begin{bmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{bmatrix}$

   Catatan:
   Bila det (A) = 0 maka matriks A disebut ***matriks singular***. Sedangkan bila det (A) ≠ 0 maka matriks A disebut ***matriks non singular***.

2. Bila A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ tentukan det (A) dan det (A^T)
   Catatan A^T = transpose matriks A

3. Bila A = $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ dan C = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ tentukan det (A), det (B) dan det (C).

4. Bila A = $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ dan C = $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ tentukan det (A), det (B) dan det (C).

5. Bila A = $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 4 & 10 & 8 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ tentukandet (A) dan det (B).

6. Bila A = $\begin{bmatrix} -2 & 6 & 4 \\ 3 & 7 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} -2 & 12 & 4 \\ 3 & 14 & -1 \\ 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ tentukandet (A) dan det (B).

7. Bila A = $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, tentukan B = $H_{21}^{(1)}$(A) tentukan det (A) dan det (B).

8. Bila A = $\begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, tentukan B = $K_{23}^{(-1)}$(A) tentukan det (A) dan det (B).

SIMPULAN

1. Dari soal no. 2 : ....
   (*sifat 1*)
2. Dari soal no. 3 dan 4 :
   .... (*sifat 2*)
3. Dari soal no. 5 dan 6 :
   .... (*sifat 3*)
4. Dari soal no. 7 dan 8 :
   .... (*sifat 4*)

IMPLIKASI dari:

Sifat 2 : Bila A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka det (A) = ...

Bila B = $\begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ maka det (B) = ...

Sifat 3 : Bila A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ maka det (A) = ...

Bila B = $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka det (B) = ...

Sifat 4 : Bila A = $\begin{bmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka det (A) = ...

Bila B = $\begin{bmatrix} 7 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ maka det (B) = ...

****

Pertemuan ke-8

MINOR, KOFAKTOR, DAN TEOREMA LAPLACE

A. Tujuan Perkuliahan

Mahasiswa dapat:

1) menentukan minor dan kofaktor suatu matriks.
2) menentukan determinan suatu matriks menggunakan Teorema Laplace (*Ekspansi Baris/Kolom*).

B. Materi Perkuliahan

1) Minor dan Kofaktor
2) Teorema Laplace

MINOR DAN KOFAKTOR

Pandang suatu matriks A = (a_{ij}) berordo nxn, dan M_{ij} adalah sub matriks A berordo (n-1)x(n-1) dimana baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks A dihilangkan. Misalkan:

A = $\begin{bmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, maka M_{12} = $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ (baris ke-1 dan kolom ke-2 dihilangkan).

B = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 9 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \\ 7 & 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, maka M_{34} = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ (baris ke-3 dan kolom ke-4 dihilangkan).

Definisi

Minor dari elemen a_{ij} suatu matriks A = (a_{ij}) adalah $|M_{ij}|$ dan kofaktor dari a_{ij} adalah $(-1)^{i+j}|M_{ij}|$ adalah suatu skalar.

Contoh:

A = $\begin{bmatrix} 6 & 4 & 8 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka minor dari elemen a_{32} = $\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$ = 24 – (-8) = 32. Sedangkan kofaktor dari a_{32} = $(-1)^{3+2}$. 32 = -32.

TEOREMA LAPLACE

Determinan suatu matriks=jumlah perkalian elemen-elemen dari sembarang baris/kolom dengan kofaktor-kofaktornya. Secara singkat dapat dituliskan:

$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ = $a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + \ldots + a_{in}A_{in}$ dengan i sembarang, disebut *ekspansi baris ke i*.

$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ = $a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$ dengan j sembarang, disebut *ekspansi kolom ke j*.

Contoh:

Tentukan det(A) menggunakan *Teorema Laplace* bila A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

Jawab:
Kita akan menghitung det(A) menggunakan ekspansi baris ke-2. Maka a_{21} =2, a_{22} =3 dan a_{23}=4. Kofaktor-kofaktornya adalah:
$A_{21}=(-1)^{2+1}|M_{21}|$ = - $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$ = 1, $A_{22}=(-1)^{2+2}|M_{22}|$ = $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$ = 4, $A_{23}=(-1)^{2+3}|M_{23}|$ = - $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$ = -3.

Jadi det(A) = $a_{21}.A_{21}+a_{22}.A_{22}+a_{23}.A_{23}$ = 2.1 + 3.4 + 4.(-3) = 2

LATIHAN 8

1. Tentukan minor dan kofaktor matriks-matriks berikut!

   a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$

   b) $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 6 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

   c) $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 5 & 2 & 5 & 3 \\ 8 & 1 & 10 & -4 \end{bmatrix}$

   d) $D = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Tentukan determinan matriks-matriks di bawah ini menggunakan Teorema Laplace (*ekspansi baris/kolom*)!

   a) A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

   b) A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

   c) A = $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 3 & 7 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

g) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

****

Pertemuan ke-9
MENENTUKAN DETERMINAN
MENGGUNAKAN SIFAT-SIFAT DETERMINAN

A. Tujuan Perkuliahan

Mahasiswa dapat menentukan determinan suatu matriks menggunakan pertolongan sifat-sifat determinan (S1, S2, S3 dan S4).

B. Materi Perkuliahan

SIFAT-SIFAT DETERMINAN

S1 : det (A) = det (A^T)

S2 : Tanda determinan berubah apabila dua baris/kolom ditukar tempatnya

Akibat:

Bila dua baris/kolom dari determinan sama maka determinan = 0

S3 : Harga determinan menjadi k kali, bila suatu baris/kolom dikalikan dengan k (suatu skalar).

Akibat:

Bila suatu matriks salah satu baris/kolomnya elemen-elemennya nol (baris/kolom nol) maka determinannya=0

S4 : Harga determinan tidak berubah bila baris/kolom ke-i ditambahkan dengan k kali baris/kolom ke-j.

Akibat:

Bila terdapat baris/kolom berkelipatan maka harga determinannya = 0

MENGHITUNG DETERMINAN SUATU MATRIKS MENGGUNAKAN PERTOLONGAN SIFAT-SIFAT DETERMINAN

Langkah-langkah

1) Pilihlah baris/kolom yang sudah banyak nolnya, atau kalau tidak ada pilih baris/kolom yang ada elemen -1 atau 1.

2) Jadikan nol, (n-1) elemen dari baris/kolom yang mengandung -1 atau 1.

3) Ekspansikan menurut baris/kolom tadi

Contoh:
Tentukan determinan matriks berikut!

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Jawab:

Pilihlah baris ke-3 untuk diekspansikan, sehingga elemen baris ke-3 semuanya nol (selain elemen a_{11}), lakukan transformasi elemeter $K_{21}^{(3)}$, $K_{31}^{(2)}$ dan $K_{41}^{(4)}$.

$$\text{Maka} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 11 & 9 & 15 \\ 2 & 10 & 9 & 10 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 14 & 11 & 18 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 11 & 9 & 15 \\ 10 & 9 & 10 \\ 14 & 11 & 18 \end{vmatrix}$$

Karena tak ada elemen -1 atau 1, kita lakukan transformasi elementer $K_{21}^{(-1)}$.

$$-1 \begin{vmatrix} 11 & 9 & 15 \\ 10 & 9 & 10 \\ 14 & 11 & 18 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 11 & -2 & 15 \\ 10 & -1 & 10 \\ 14 & -3 & 18 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -9 & -2 & 15 \\ 0 & -1 & 10 \\ -16 & -3 & 18 \end{vmatrix} =$$

$$-1 \begin{vmatrix} -9 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ -16 & -3 & -12 \end{vmatrix} = (-)(-1) \begin{vmatrix} -9 & -5 \\ -16 & -12 \end{vmatrix} = 108 - 80 = 28$$

LATIHAN 9

Tentukan determinan matriks-matriks berikut!

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 11 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

******

Pertemuan ke-10

ADJOINT DAN INVERS MATRIKS

A. TUJUAN PERKULIAHAN

Mahasiswa dapat:

1) Menentukan adjoint suatu matriks.
2) Menentukan invers suatu matriks menggunakan adjoint matriks.
3) Menggunakan invers matriks untuk menyelesaikan persamaan linier.

B. MATERI PERKULIAHAN

1) Adjoint Matriks
2) Invers Matriks

ADJOINT MATRIKS

Pandang matriks A = (a_{ij}), dan kofaktor-kofaktor dari elemen a_{ij} adalah A_{ij}. Transpose dari matriks (A_{ij}) disebut Adjoint matriks A.

Contoh:

Tentukan adjoint matriks A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Jawab :

Kesembilan kofaktor matriks A adalah A_{11} = -18, A_{12} = 2, A_{13} = 4, A_{21} = -11, A_{22} = 14, A_{23} = 5, A_{31} = -10, A_{32} = -4 dan A_{33} = -8. (ingat pengertian kofaktor).

Jadi adj. A = $\begin{pmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{pmatrix}$

INVERS MATRIKS

Definisi

Suatu matriks bujursangkar A berorodo n x n disebut mempunyai invers bila ada suatu matriks B, sehingga AB = BA = I. B disebut invers matriks A dan ditulis B = A^{-1}.

Cara mencari invers matriks menggunakan adjoint matriks:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}. \text{ Adj. } A}$$

dengan det (A) ≠ 0 (Non Singular)

Contoh :

Tentukan invers matriks A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Jawab:

det (A) = -46 (cari sebagai latihan).

adj. A = $\begin{pmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{pmatrix}$

Maka $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}$. Adj. A

$$A^{-1} = \frac{1}{-46}. \begin{pmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{23} & \frac{11}{46} & \frac{2}{23} \\ \frac{-1}{23} & \frac{-7}{23} & \frac{2}{23} \\ \frac{-2}{23} & \frac{-5}{46} & \frac{2}{23} \end{pmatrix}$$

LATIHAN 10

1. Carilah invers matriks-matriks berikut menggunakan adjoint matriks (bila ada)!

   a. A $=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

   b. M = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

   c. K = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

   d. R = $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 10 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. Tentukan penyelesaian persamaan berikut menggunakan invers matriks!

   a. $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = -7 \\ 3x + y + 2z = 13 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - 3y + z = 4 \\ x + y - 3z = -6 \end{cases}$

****

Pertemuan ke-11

SISTEM PERSAMAAN LINIER (SPL)

A. Tujuan Perkuliahan

Mahasiswa dapat:

1) menuliskan bentuk umum persamaan linier.
2) mengidentifikasi jenis-jenis persamaan linier.

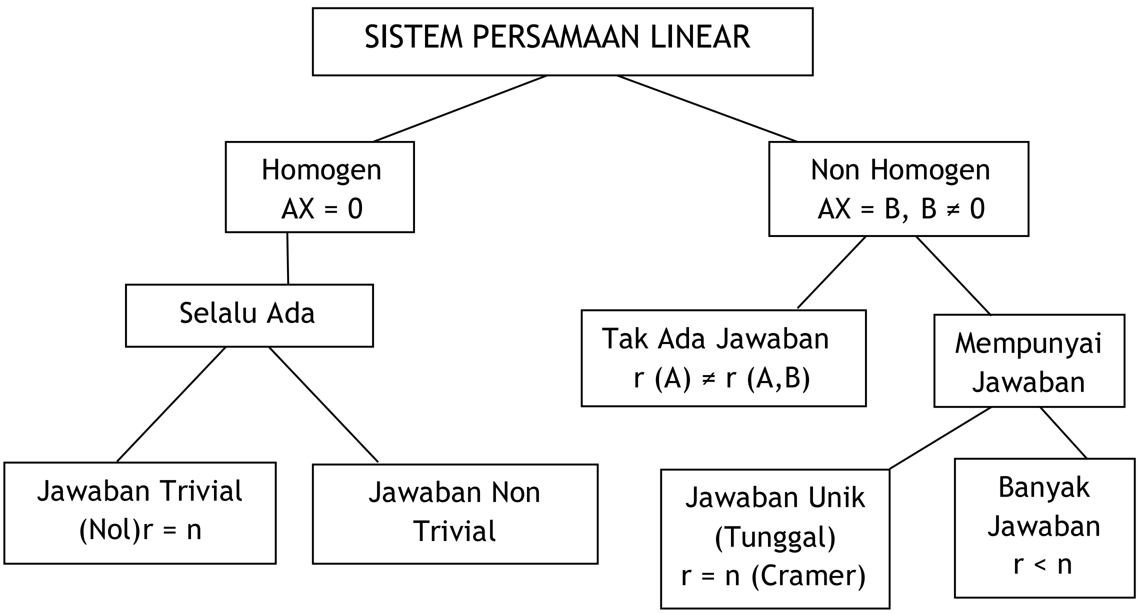
B. Materi Perkuliahan

SISTEM PERSAMAAN LINIER

Bentuk umum persamaan linier

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$. a_i dan b adalah skalar, dimana a_i disebut koefisien, x_i disebut variabel dan b disebut konstanta dari persamaan. Sekumpulan nilai $x_1 = k_1$, $x_2 = k_2$, ... $x_n = k_n$ yang memenuhi persamaan $a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + \ldots + a_nk_n = b$ disebut penyelesaian dari persamaan $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$.

Susunan persamaan linier:



Catatan: r=rank A; n=banyaknya variabel.

Dari m buah sistem persamaan linier dengan n variabel.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Selanjutnya dapat disajikan dalam bentuk persamaan matriks AX=B sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{12} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Dengan A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{12} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$, X = $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, dan B = $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, sehingga matriks lengkap (A, B) dapat ditulis:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{12} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}$$

TEOREMA

Suatu susunan persamaan linier akan mempunyai jawaban apabila r(A)=r(A, B).

Contoh:

Apakah susunan persamaan linier berikut mempunyai penyelesaian?

1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 7 \\ 4x_1 + 6x_2 = 13 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 7 \\ 4x_1 + 6x_2 = 13 \end{cases}$

Jawab:

Sistem persamaan linier di atas dapat ditulis menjadi persamaan matriks: AX = B

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix}$ sehingga A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ dan

matriks lengkap (A,B) = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 6 \end{bmatrix}$ diperoleh r(A) = 1 dan r(A,B) = 2 (cari sebagai latihan).

Karena r(A) ≠ r (A,B) maka sistem persamaan tersebut tidak mempunyai jawaban.

LATIHAN 11

Tentukan, apakah masing-masing persamaan berikut mempunyai jawaban non-trivial?

1. $\begin{cases} x - 2y + 3z + w = 0 \\ 2x - 3y + z + w = 0 \\ 4x + y - 2z - w = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + 5y + 2z = 0 \\ 3x - y - 4z = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 5y + 2z = 0 \\ x + 4y + 7z = 0 \\ x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$

4. Tentukan syarat a,b dan c agar sistem persamaan berikut mempunyai penyelesaian.

   $\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c \end{cases}$

5. Diketahui sistem persamaan linier $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + ky + 3z = 2 \\ 2x + 3y + kz = 3 \end{cases}$

   Tentukan harga k agar sistem persamaan tersebut:

   a) mempunyai jawaban tunggal

   b) mempunyai jawaban lebih dari satu

   c) tidak mempunyai jawaban

*****

Pertemuan ke-12

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINIER (SPL)

A. Tujuan Perkuliahan

Mahasiswa dapat menyelesaikan SPL dengan cara:

1) Eliminasi
2) Substitusi
3) Gabungan eliminasi dan substitusi

B. Materi Perkuliahan

BENTUK UMUM SPL

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

METODE ELIMINASI

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian dari $\begin{cases} x + 3y + 4z = 2 \ldots\ldots\ldots(1) \\ 2x - y - 5z = 3 \ldots\ldots\ldots(2) \\ 3x + 2y - 2z = -1 \ldots\ldots\ldots(3) \end{cases}$

$x, y, z \in R$

Jawab:

1) Eliminasikan x dengan mengurangkan persamaan (2) dengan persamaan (1) setelah terlebih dahulu dikalikan 2

$$\begin{array}{ll} (1) \times 2 & 2x + 6y + 8z = 4 \\ (2) \times 1 & \underline{2x - y - 5y = 3} \quad - \\ & \quad 7y + 13z = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (4) \end{array}$$

2) Ulangi lagi langkah tersebut untuk persamaan yang lainnya, yaitu dengan mengalikan persamaan (1) dengan 3 kemudian mengurangkannya dengan persamaan (3):

$$
\begin{array}{lr}
(1) \times 3 & 3x + 9y + 12z = 6 \\
(3) \times 1 & \underline{3x + 2y - 2z = -1} \; - \\
 & 7y + 14z = 7 \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (5)
\end{array}
$$

3) Eliminasikan y dari persamaan (4) dan (5)
   $7y + 13z = 1$
   $7y + 14z = 7$, diperoleh $z = 6$

4) Substitusikan $z = 6$ ke pers. (4) diperoleh $7y + 13(6) = 1 \Rightarrow y = -11$

5) Substitusikan $z = 6$ dan $y = -11$ ke pers. (1) diperoleh $x + 3(-11) + 4(6) = 2$, sehingga $x = 11$.

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{(11, -11, 6)\}$

METODE SUBSTITUSI

Dengan metode substitusi selesaikan persamaan berikut!

$$
\begin{cases}
x - 2y + z = -1 \ldots\ldots\ldots (1) \\
2x - 3y + 4z = -5 \ldots\ldots\ldots (2) \\
3x - 4y + 2z = 1 \ldots\ldots\ldots (3)
\end{cases}
\quad x, y, z \in R.
$$

Jawab:

1) Kita gunakan persamaan (1) untuk menyatakan x dalam y dan z, maka persamaan (1) menjadi $x = 2y - z - 1$.
2) Nilai x tersebut disubstitusikan ke persamaan (2) dan (3) sehingga:

   $2(2y - z - 1) - 3y + 4z = -5 \Leftrightarrow y + 2z = -3$ ....(4)

   $3(2y - z - 1) - 4y + 2z = 1 \Leftrightarrow 2y - z = 4$............(5)
3) Selanjutnya persamaan (4) dan (5) diselesaikan dengan cara substitusi. Ubah persamaan (4) menjadi $y=-3-2z$, kemudian substitusikan ke persamaan (5). Sehingga $2(-3-2z)-z=4 \Leftrightarrow -6-4z-z=4$ atau $-5z=10 \Rightarrow z=-2$.
4) Nilai $z=-2$ disubstitusikan ke persamaan (4), sehingga $y+2(-2)=-3 \Rightarrow y=1$

   Nilai $z=-2$ dan $y=1$ disubstitusikan ke salah satu persamaan (1), (2) atau (3). Misalnya kita substitusikan ke persamaan (1), sehingga $x=2(1)-(-2)-1=3$.

   Jadi himpunan penyelesaian sistem persamaan di atas adalah:

   $\{(3, 1, -2)\}$.

METODE GABUNGAN (ELIMINASI DAN SUBSTITUSI)

Dalam menyelesaikan persamaan linier sering kali akan lebih cepat menggunakan metode gabungan eliminasi dan substitusi.

Contoh:
Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan dengan metode gabungan eliminasi dan substitusi:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 6 \\ 3x - 4y = -11 \end{cases} x,y \in R$$

Jawab:

1) Nilai x dicari dengan mengeliminir variabel y, dengan cara mengalikan persamaan pertama dengan 4, dan mengalikan persamaan kedua dengan 5.

$$\begin{array}{ll|l|r} 4x + 5y = 6 & & x4 & 16x + 20y = 24 \\ 3x - 4y = -11 & & x5 & 15x - 20y = -55 \\ \hline & & & 31x = -31 \\ & & & x = -1 \end{array} +$$

2) Nilai y dicari dengan mensubstitusikan nilai x = -1 ke salah satu persamaan, misalnya ke persamaan pertama. Maka persamaan pertama menjadi $4(-1) + 5y = 6$ sehingga diperoleh 5y=6+4, y=2. Jadi himpunan penyelesaiannya adalah {(-1, 2)}.

LATIHAN 12

Selesaikan SPL dalam variabel x, y, dan z di bawah ini dengan cara yang sesuai!

1. $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} px - qy = \frac{p^2+q^2}{2} \\ py = (2p + q)x - p(p + q) \end{cases}$

3. $\begin{cases} ax + by = 2ab \\ a^2x + b^2y = ab(a + b) \end{cases}$

4. $\begin{cases} ax + by = a + b \\ x + y = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \end{cases}$

5. $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = -4 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = -1 \\ \frac{3}{x} + \frac{2}{z} = 14 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = \frac{x+y+z}{3} - 1 \\ y = \frac{x+y+z}{4} + 1 \\ z = \frac{x+y+z}{6} + 3 \end{cases}$

****

Pertemuan ke-13
METODE CRAMER

A. Tujuan Perkuliahan

Mahasiswa dapat menyelesaikan SPL menggunakan metode Cramer

B. Materi Perkuliahan

METODE CRAMER

Aturan Cramer dapat digunakan untuk mencari penyelesaian sistem persamaan linier non homogen yang mempunyai jawaban tunggal (r = n). Untuk sistem persamaan linier non homogen AX=B, maka $x_k = D_k/D$; dengan D = det (A).

Contoh:

Selesaikan sistem persamaan berikut dengan aturan Cramer!

1. $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x + y = 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x + 2y = 4 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$

Jawab:

1. Persamaan di atas dapat ditulis dalam persamaan matriks: $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$. Sehingga D=det (A) = 3.1 – 2.1 = 1. Tunjukkan bahwa r(A) = r(A,B) = n = 2.

   Maka : x = $\frac{D_x}{D}$ = $\frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{1}$ = $\frac{5.1 - 2.2}{1}$=1; y = $\frac{D_y}{D}$ = $\frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{1}$ = $\frac{3.2-5.2}{1}$=1. Jadi penyelesaiannya adalah (1,1).

2. Karena m>n kita tidak dapat menggunakan aturan Cramer, maka terlebih dahulu harus diperiksa apakah r(A) = r(A,B)? Tunjukkan bahwa r(A)=r(A,B)=2 sebagai latihan. Selanjutnya pilih dua persamaan (yang bukan baris/kolom nol), lalu gunakan aturan Cramer, OK?. Jawab: (0,2).

LATIHAN 13

Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linier berikut menggunakan aturan Cramer (bila memungkinkan)!

1. $\begin{cases} \dfrac{6}{x} - \dfrac{5}{y} = 9 \\ \dfrac{7}{x} - \dfrac{2}{y} = 5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x + y + z = 7 \\ 2x - y + 2z = 7 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x - y - z = -1 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 7 \\ x + 2y - 4z = 3 \\ 3x - 4y - 6z = 5 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + 2y = 2a \\ y - z = -b \\ 2z - x = a - b \end{cases}$

6. $\begin{cases} x + y = 6 \\ x + z = 10 \\ z + y = 4 \end{cases}$

*****

DAFTAR KEPUSTAKAAN

1) Howard Anton. (1987). *Elementary Linear Algebra* 5th Edition. New York: John Wiley and Sons.

2) Son B. Kolman. (1970). *Elementary Linear Algebra*. New York: MavMillan PublishingCompany.

3) Suryadi, HS dan Harini Machmudi. (1998). *Aljabar Linier*. Jakarta: Ghalia Indonesia.

4) Steven J. Leon. (2001). *Aljabar Linear dan Aplikasinya Edisi Kelima* (Alih Bahasa: Alit Bondan). Jakarta: Penerbit Erlangga.