GERAKAN GURU MEMBACA DAN MENULIS

G2M2

Pengantar Dasar Matematika

I Komang Sukendra, S.Pd., M.Si., M.Pd.

Drs. I Made Surat, M.Pd.

KLIK MEDIA

Pengantar Dasar Matematika

Penulis:

I Komang Sukendra, S.Pd.,M.Si., M.Pd. & Drs. I Made Surat, M.Pd.

ISBN:

978-623-6134-76-4

Ukuran Buku:

14,8 x 21

Tebal Buku:

161 halaman

Desain Cover:

Sendy Boy

Layouter:

Ainunrh

Editor:

Teddy Fiktorius

Cetakan:

April 2021

Dicetak & Diterbitkan Oleh:

KLIK MEDIA

Jl. Bromo 302 RT 01 RW 03 Kebonagung
Sukodono-Lumajang-Jawa Timur
Telp. 085259488719-081336335612

Anggota IKAPI

Kata Pengantar

Pendiri G2M2

(fiktoriusteddy@gmail.com - 0852 4592 1881)

SALAM HEBAT!

Salam yang paling tepat untuk menyambut hadirnya buku "**PENGANTAR DASAR MATEMATIKA**".

Andai saja rimba adalah pena dan samudra adalah tinta, pun tak akan cukup bagi kita untuk menuliskan betapa bersyukurnya kita masih dilimpahkan rahmat-Nya sehingga dapat berkarya dalam hidup ini. Buku ini merupakan karya nyata dari upaya penulis untuk mengukir namanya dalam peradaban ini. Ini lah insan yang senantiasa mengingat pesan almarhum Pramoedya Ananta Toer, penulis Indonesia.

"**Orang boleh pandai setinggi langit, tapi selama ia tidak menulis, ia akan hilang di dalam masyarakat dan dari sejarah. Menulis adalah bekerja untuk keabadian**."

Merupakan suatu kehormatan bagi saya untuk menjadi narasumber sekaligus pengisi lembar kata pengantar pada buku ini yang merupakan produk akhir dari sesi pendampingan penulisan naskah buku Gerakan Guru Membaca dan Menulis (G2M2) pada Workshop Nasional Daring dengan tema "Guru Profesional Berani Publikasi Ilmiah" yang diselenggarakan oleh Lembaga Pengembangan Akademik (LPA) Universitas PGRI Mahadewa Indonesia pada tanggal 11 Juli 2020 sampai dengan 11 Agustus 2020.

Teruntuk para pembaca yang budiman, selamat berliterasi ria. Semoga 'Baca! Baca! Dan baca!' menjadi slogan aktivitas intelektual Anda semua.

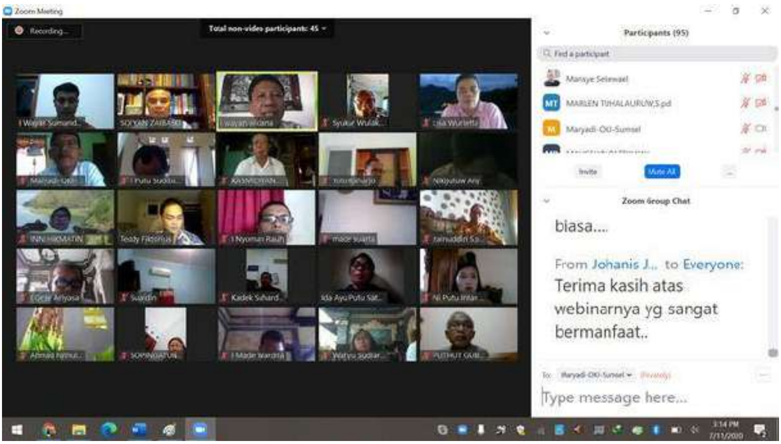
Teruntuk penulis, teruslah berkarya. Jadilah garda terdepan untuk menjaga obor literasi tetap menyala agar keberlangsungan peradaban kita tetap terjamin. Ingatlah senantiasa moto komunitas G2M2, **"Siang dan malam akan berlalu; namun tidak dengan tulisanku"**.

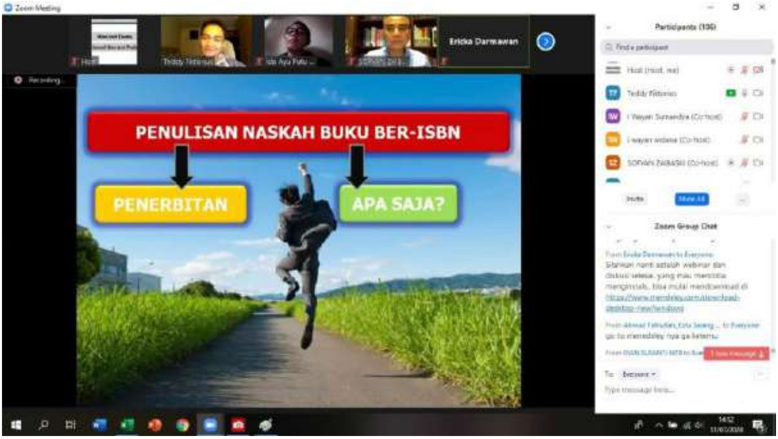
Pontianak, Maret 2021

Teddy Fiktorius, M.Pd.

Suasana Workshop Nasional Daring dengan tema "Guru Profesional Berani Publikasi Ilmiah" yang diselenggarakan oleh Lembaga Pengembangan Akademik (LPA) Universitas PGRI Mahadewa Indonesia pada tanggal 11 Juli 2020


Workshop Nasional Daring
"Guru Profesional Berani Publikasi Ilmiah"
Sabtu, 11 Juli 2020 s.d. Selasa, 14 Juli 2020 Pukul 13.00-16.00 WITA
IJED
Indonesian Journal of Educational Development
diselenggarakan oleh Lembaga Pengembangan Akademik <LPA> Universitas Mahadewa Indonesia
NARASUMBER
Dr. I Wayan Surata, S.Pd., M.Pd.
Widyaiswara LPMP Bali
Dr. I Made Suarta, S.H., M.Hum.
Rektor Universitas Mahadewa Indonesia
Dr. I Wayan Widana, S.Pd., M.Pd.
Pemimpin Redaksi IJED
Dr. Ericka Darmawan, M.Pd.
Dosen FKIP Universitas Tidar
Teddy Fiktorius, M.Pd.
MODERATOR
HOST
Fasilitas:
1. E-Sertifikat 32 Jam
2. Materi
3. Pendampingan hingga menghasilkan produk:
-Buku ber-ISBN
-Artikel ilmiah IJED siap terbit
I Wayan Sumandya, S.Pd., M.Pd.
Editor IJED
*Registrasi:
http://gg.gg/regworkshop-ijed2
*Narahubung:
I Wayan Widana (081246707O5)
Yudha (082135701609)
KONTRIBUSI
50K
BNI No. 0399690351
A.N. BPK I WAYAN WIDANA


Zoom Meeting
Recording...
Total non-video participant: 45
Participants (95)
Find a participant
Zoom Group Chat
biasa....
From Johanis J... to Everyone:
Terima kasih atas webinarnya yg sangat bermanfaat..
Type message here...


PENULISAN NASKAH BUKU BER-ISBN
PENERBITAN
APA SAJA?
Ericka Darmawan

Sekapur Sirih

Rektor Universitas PGRI Mahadewa Indonesia

“Menulis adalah sebuah kebutuhan agar otak kita tidak dipenuhi oleh feses pemikiran. Maka, menulislah. Entah itu di buku tulis, daun lontar, prasasti, atau bahkan media sosial, menulislah terus tanpa peduli karyamu akan dihargai oleh siapa dan senilai berapa.”

Fiersa Besari-Penulis dan Pemusik dari Indonesia

UNESCO mempublikasi data statistik yang cukup mengejutkan pada tahun 2012. UNESCO menyebutkan bahwa indeks minat baca di Indonesia baru mencapai 0,001. Ini berarti bahwa dari setiap 1.000 penduduk Indonesia, hanya 1 orang saja yang memiliki minat baca! Kemudian, sebuah survei yang dilaksanakan oleh Central Connecticut State University pada tahun 2003 hingga 2004 menempatkan Indonesia pada peringkat 60 dari 61 negara terkait minat baca. Negara tercinta ini hanya unggul dari

Botswana yang berada pada posisi buntut, yakni peringkat 61.

Meskipun pengertian literasi sudah berkembang pesat, aktivitas membaca dan menulis tetap tergolong pada literasi dasar yang perlu dikuasai oleh setiap individu untuk bertahan hidup. Membaca dipandang sebagai sebuah usaha untuk menggali ilmu. Ilmu tersebut seyogyanya perlu diikat dengan usaha literasi lainnya, yakni menulis. Penguatan budaya literasi adalah kunci untuk memajukan bangsa ini.

Suatu kebanggaan bagi saya untuk mengisi lembar sekapur sirih pada buku yang berjudul "**PENGANTAR DASAR MATEMATIKA**" karya **I Komang Sukendra, S.Pd., M.Si., M.Pd.** dan **Drs. I Made Surat, M.Pd.**. Buku yang diperuntukkan bagi mahasiswa ini memberikan pengulasan yang mendalam perihal konsep dasar matematika.

Kepada pendiri G2M2, Bapak Teddy Fiktorius, penghargaan setinggi-tingginya atas upaya dalam memotivasi dan menginspirasi para pendidik, baik guru maupun dosen, untuk menunaikan gerakan literasi secara nyata.

Kepada penulis, teruslah mengukir aksara. Jadilah ujung tombak dalam mengawal obor literasi tetap menyala sebagai bukti nyata kedigdayaan peradaban kita.

Kepada pembaca, selamat membaca, merenung, dan pada akhirnya menuangkan gagasan-gagasan baru dalam budaya literasi menulis secara nyata.

Bali, Maret 2021

Dr. I Made Suarta, S.H., M.Hum.

Prakata

Dengan memanjatkan puji syukur ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa, buku bertajuk “Pengantar Dasar Matematika” hadir ditengah-tengah kita semua. Buku ini membahas Pengantar Dasar Matematika yang terdiri dari: Logika Proposisi, Argumen Dan Kevalidannya, Logika Predikat, Induksi Matematika, Pernyataan Matematika Dan Strategi Pembuktian, Himpunan, Relasi dan Fungsi

Buku ini tidak mungkin bisa hadir dihadapan kita semua tanpa bantuan dan dukungan dari keluarga, sahabat, mahasiswa, serta rekan kerja. Oleh karenanya penulis mengucapkan beribu terima kasih.

Penulis menyadari bahwa tidak ada kesempurnaan mutlak dalam kehidupan ini. Demikian juga dengan buku ini yang pastinya masih terdapat banyak ruang yang membutuhkan penyempurnaan. Oleh karena itu, penulis dengan rendah hati mengharapkan masukan dan kritikan yang bersifat membangun dari pembaca demi penyempurnaan buku ini.

Denpasar, Maret 2021

Penulis

Daftar Isi

Bab I

Logika Proposisi

Logika adalah bagian dari matematika, tetapi pada saat yang sama juga merupakan bahasa matematika. Pada akhir abad ke-19 dan awal abad ke-20, ada kepercayaan bahwa semua hal dalam matematika bisa direduksi menjadi logika simbolik dan bisa dibuat menjadi formal sepenuhnya. Kepercayaan ini, walaupun masih dipegang dalam bentuk modifikasinya sekarang ini, telah digoyahkan oleh K. Godel pada tahun 1930 ketika ia menunjukkan bahwa selalu ada sejumlah kebenaran yang tidak bisa diturunkan dalam sistem formal apapun. Studi tentang logika simbolik biasanya dibagi menjadi beberapa bagian. Yang pertama dan paling mendasar adalah logika proposisi. Di atasnya nanti adalah logika predikat yang merupakan bahasa matematika.

1.1 Proposisi

Di matematika, kita selalu mengasumsikan bahwa setiap pernyataan yang disebut proposisi selalu jelas maksudnya dan tidak ambigu sehingga hanya ada dua kesimpulan tentang pernyataan itu, yaitu benar atau salah dan tidak ada pilihan lain selain keduanya. Hal ini berbeda dengan pernyataan dalam kehidupan sehari-hari yang tidak selalu bisa ditentukan kebenarannya dan bermakna ganda, terutama pernyataan politik.

Definisi 1.1 (Proposisi)

Proposisi adalah kalimat yang bernilai benar atau salah, tetapi tidak keduanya sekaligus.

Contoh 1.1 (Proposisi)

Bukit tinggi adalah ibukota propinsi Sumatera Barat.

Sebuah segitiga memiliki tiga sudut dalam.

$2 + 6 = 9$

Sembilan adalah salah satu bilangan prima.

Semua pernyataan di atas bisa ditentukan nilai kebenarannya dan hanya memiliki satu nilai kebenaran.

Contoh 1.2 (Bukan Proposisi)

Apakah Didi berada di rumah?

Kerjakan latihan di halaman 234!

Lukisan Affandi itu indah sekali. Semoga lekas sembuh.

$x + 6 = 9$.

Semua pernyataan pada contoh terakhir bukan proposisi. Yang pertama adalah suatu pertanyaan, dan yang kedua merupakan suatu perintah, dan karenanya bukan proposisi. Yang ketiga memiliki nilai kebenaran yang relatif, sebagian orang akan menilai BENAR, tapi sebagian yang lain mungkin berpikir nilainya SALAH. Jadi, memiliki dua nilai kebenaran. Selanjutnya, pernyataan keempat merupakan suatu harapan. Pernyataan yang terakhir nilai kebenarannya masih bersifat terbuka bergantung pada nilai x.

1.2 Ingkaran dan Penghubung Logika

Dari satu atau lebih proposisi tunggal, kita bisa membentuk proposisi baru dalam bentuk ingkaran/negasi (-) atau menggunakan penghubung logika (*logical connectives*). Ada empat penghubung logika yang kita kenal, yaitu: konjungsi ($\wedge$), disjungsi ($\vee$), implikasi ($\Rightarrow$), dan biimplikasi ($\Leftrightarrow$).

1.2.1 Negasi

Negasi atau ingkaran dari suatu proposisi didefinisikan sebagai bukan kasus proposisi tersebut. Negasi dilambangkan dengan (-). Kita dapat membuat pernyataan negasi/ingkaran dari suatu pernyataan dengan menambahkan atau menghilangkan kata ”tidak” atau ”bukan” pada pernyataan awalnya.

Contoh 1.3

P : Tuan X seorang laki-laki.

-P : Tuan X bukan seorang laki-laki.

Pada negasi, nilai kebenarannya meruapakan kebalikan dari nilai kebenaran proposisi semula. Seperti pada contoh, jika seseorang adalah laki-laki maka P bernilai BENAR, tetapi -P menjadi SALAH. Begitu juga sebaliknya, jika seseorang adalah perempuan. Berikut tabel kebenaran untuk negasi, dimana B berarti BENAR dan S berarti SALAH.

Tabel 1.1 Tabel Kebenaran Untuk Negasi

P	**-P**
B	S
S	B

1.2.2 Konjungsi

Konjungsi adalah proposisi majemuk yang dihubungkan oleh kata ”dan” atau ”yang”. Konjungsi dilambangkan dengan ∧. Kita definisikan bahwa pernyataan ”P dan Q” bernilai BENAR jika P BENAR dan Q BENAR dan pernyataan ”P dan Q” bernilai SALAH jika P SALAH atau Q SALAH.

Tabel 1.2 Tabel Kebenaran Konjungsi

P	Q	P ∧ Q
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Sesuai table 1.2 di atas, kita bisa menyatakan bahwa konjungsi bernilai BENAR hanya jika proposisi pembentuknya semua bernilai BENAR. Sebaliknya, konjungsi akan bernilai SALAH jika salah satu proposisi yang membentuknya bernilai SALAH.

Contoh 1.4

P: Ajo Kudun berasal dari Pariaman (B)

Q: UNP ada di Padang (B)

P ∧ Q: Ajo Kudun berasal dari Pariaman dan UNP ada di Padang (B)

Contoh 1.5

Budi sudah makan belajar dan makan

Misalkan, untuk dapat diizinkan bermain oleh Ibu, Budi harus memenuhi kondisi di atas. Jika satu saja atau bahkan kedua pernyataan tersebut dilanggar, maka Budi tidak diizinkan untuk bermain.

1.2.3 Disjungsi

Disjungsi adalah proposisi majemuk yang dihubungkan oleh kata ”atau”. Disjungsi dilambangkan dengan ∨. Kita definisikan bahwa pernyataan ”P atau Q” bernilai BENAR jika P BENAR atau Q BENAR dan pernyataan ”P atau Q” bernilai SALAH jika P SALAH dan Q SALAH.

Tabel 1.3 Tabel Kebenaran Disjungsi

P	Q	P V Q
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Dari table 1.3, kita bisa menyatakan bahwa disjungsi akan bernilai SALAH hanya jika proposisi yang membentuknya semua bernilai SALAH. Disjungsi akan bernilai R jika salah satu proposisi yang membentuknya bernilai BENAR.

1.2.4 Implikasi

Implikasi adalah proposisi majemuk yang berbentuk ”jika..., maka....” dan dilambangkan dengan => Pernyataan ”P => Q” dapat dibaca ”jika P, maka Q”. Dalam hal ini P disebut anteseden, sedangkan Q disebut konsekuen. Nilai kebenarannya dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 1.4: Tabel Kebenaran Untuk Implikasi

P	**Q**	**P ➔ Q**
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Dari tabel terlihat bahwa implikasi bernilai SALAH hanya jika anteseden BENAR, tetapi konsekuen SALAH. Untuk kasus lain, implikasi bernilai BENAR. Perhatikan juga bahwa, jika anteseden SALAH, maka implikasi pasti bernilai BENAR. Demikian juga jika konsekuen BENAR. Jadi, kita juga bisa menyatakan bahwa suatu implikasi bernilai BENAR jika anteseden SALAH atau konsekuen BENAR.

Pernyataan ”P => Q” juga dapat dibaca:

”P menyebabkan Q”,

”P mengakibatkan Q”,

”P syarat cukup untuk Q”,

”Q akibat dari P”,

”Q jika P”, atau

”Q syarat perlu untuk P”.

Contoh 1.6

P: Tono laki-laki (B)

Q: Tini laki-laki (S)

P) Q: Jika Tono laki-laki, maka Tini laki-laki (S)

Contoh 1.7

A: Hari ini Minggu (S)

B: UNP ada di Jakarta (S)

A => B: Jika hari ini Minggu, maka UNP ada di Jakarta (B)

Proposisi yang terkait dengan Implikasi

Misalkan P => Q. Maka,

1. Q =>P disebut konvers dari P =>Q
2. ¬P =>¬Q disebut invers dari P =>Q
3. ¬Q => ¬P disebut kontraposisi dari P =>Q

Contoh 1.8 (Implikasi dan Proposisi Terkait)

Implikasi: Jika hari ini Rabu, maka UNP ada di Jakarta.

Konvers: Jika UNP ada di Jakarta, maka hari ini Rabu.

Invers: Jika hari ini bukan Rabu, maka UNP tidak ada di Jakarta.

Kontraposisi: Jika UNP tidak ada di Jakarta, maka hari ini bukan Rabu.

1.2.5 Biimplikasi

Biimplikasi adalah proposisi majemuk yang berkaitan dengan kata ”...jika dan hanya jika....” yang dilambangkan dengan⇔sehingga pernyataan ”P ⇔Q” dibaca ”P jika dan hanya jika Q”. Selain itu, pernyataan ”P ⇔Q” juga dapat dibaca:

”P ekivalen dengan Q”,

”P syarat cukup dan perlu untuk Q”.

Nilai kebenaran dari biimplikasi dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 1.5 Tabel Kebenaran Untuk Biimplikasi

P	Q	P ⇔ Q
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Dari tabel terlihat bahwa biimplikasi bernilai benar jika nilai kebenaran dari keduanya sama. Pernyataan P⇔Q dapat juga didefinisikan sebagai (P =>Q) ∧ (Q =>P).

Contoh 1.9

P: Tono laki-laki (B)

Q: Tini laki-laki (S)

P , Q Tono laki-laki jika dan hanya jika Tini laki-laki (S)

Contoh 1.10

A: Hari ini Minggu (S)

B: UNP ada di Jakarta (S)

A , B: Hari ini Minggu ekivalen dengan UNP ada di Jakarta (B)

Sampai saat ini, proposisi majemuk yang dikenal memiliki beragam nilai

kebenaran tergantung pada nilai kebenarannya. Pada bagian berikut kita akan

mengenal istilah untuk proposisi-proposisi yang nilai kebenarannya tetap, yaitu

tautologi dan kontradiksi.

1.3 Tautologi, Kontradiksi, dan Kontingensi

Sebuah proposisi majemuk berdasarkan nilai kebenarannya dapat dikelompokkan menjadi Tautologi, Kontradiksi, atau Kontingensi. Definisinya adalah sebagai berikut.

Definisi 1.2. Tautologi adalah proposisi yang selalu bernilai BENAR untuk semua kombinasi nilai kebenaran dari komponen-komponennya.

Definisi 1.3. Kontradiksi adalah proposisi yang selalu bernilai SALAH untuk semua kombinasi nilai kebenaran dari komponen-komponennya.

Definisi 1.4. Kontingensi adalah proposisi yang bukan tautologi maupun kontradiksi

Contoh 1.11 (Tautologi)

(P ∧ Q) => (P V Q) adalah suatu tautologi karena selalu bernilai BENAR.

Lihat tabel berikut:

Tabel 1.6: Tabel Kebenaran Untuk Tautologi

P	**Q**	**P ∧ Q**	**P V Q**	**(P∧Q) => (PVQ)**
B	B	B	B	B
B	S	S	B	B
S	B	S	B	B

S	S	S	S	B

Selain dengan tabel, kita juga bisa memperlihatkan kebenarannya dengan cara berikut.

Proposisi (P ∧ Q)) (P V Q) bernilai SALAH jika P ∧ Q bernilai BENAR dan P V Q bernilai SALAH. Selanjutnya, P ∧ Q bernilai BENAR hanya jika P, Q bernilai BENAR. Akibatnya, P V Q bernilai BENAR.

Jadi, tidak mungkin P ∧ Q bernilai BENAR dan P V Q bernilai SALAH. Akibatnya, (P ∧Q) ➔ (P V Q) juga tidak mungkin bernilai SALAH.

Jadi, proposisi (P ∧ Q) ➔(P V Q) adalah suatu Tautologi.

Contoh 1.12 (Kontradiksi)

P ∧ -P adalah suatu kontradiksi karena selalu bernilai SALAH. Lihat table Berikut:

Tabel 1.7: Kebenaran Untuk Negasi P adalah -P

P	-P	P ∧ -P
B	S	S
S	B	S

Dengan cara lain, Proposisi P ∧ -P bernilai BENAR jika P bernilai BENAR dan -P bernilai BENAR. Ini tidak mungkin terjadi karena jika P BENAR, maka -P SALAH.

Jadi, tidak mungkin P ∧ -P bernilai BENAR sehingga P ∧ -P adalah suatu Kontradiksi.

1.4 Aturan Ekivalensi dan Inferensi

Dalam banyak kasus, kita tidak selalu bisa bekerja dengan proposisi-proposisi yang sudah kita miliki. Mungkin karena wujudnya yang sekarang tidak memberikan kemudahan kepada kita untuk menganalisa ataupun memeriksa kebenarannya. Untuk itu, kita perlu membentuk menjadi proposisi lain yang nilai kebenarannya setara atau masih benar secara logika.

1.4.1 Aturan Ekivalensi

Dua proposisi A dan B dianggap ekivalen (dilambangkan dengan A = B) jika keduanya memiliki nilai kebenaran yang sama. Dalam hal ini bisa juga dinyatakan A ⇔B

Tabel 1.8 : Dua Proposisi A dan B Dianggap Ekivalen

Nama Aturan	Deskripsi
Komutatif	P ∧ Q ≡ Q ∧ P P V Q ≡ Q V P
Asosiatif	(P V Q) V R ≡ P V (Q V R)

Nama Aturan	Deskripsi
	$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$
Distributif	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
Idempoten	$P \wedge P \equiv P$ $P \vee P \equiv P$
Ingkaran Ganda	$\neg(\neg P) \equiv P$
Identitas	$P \wedge \text{SALAH} \equiv \text{SALAH}$ $P \wedge \text{BENAR} \equiv P$ $P \vee \text{SALAH} \equiv P$ $P \vee \text{BENAR} \equiv \text{BENAR}$
Komplemen	$P \wedge -P \equiv \text{SALAH}$ $P \vee -P \equiv \text{BENAR}$
De Morgan	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$ $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
Kontrapositif	$P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$
Implikasi Material	$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$
Keekivalenan Material	$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ $P \Leftrightarrow Q \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

Jika - (P V Q) bernilai SALAH, maka P V Q bernilai BENAR.

Artinya, setidaknya salah satu dari P dan Q bernilai BENAR.

Akibatnya, setidaknya salah satu dari -P dan -Q bernilai SALAH

sehingga -P ∧ -Q bernilai SALAH.

1. De Morgan (1) -(P V Q) =(-P ∧ -Q).

   Jika - (P V Q) bernilai BENAR, maka P V Q bernilai SALAH sehingga P dan Q bernilai SALAH. Akibatnya, -P dan -Q bernilai BENAR sehingga -P ∧ -Q bernilai BENAR.

2. Eksportasi/Importasi P => (Q => R) ≡ (P ∧ Q) => R

   Jika P => (Q => R) bernilai BENAR, maka Q => R bernilai BENAR atau P bernilai SALAH. Proposisi Q => R bernilai BENAR jika Q SALAH atau R BENAR. Akibatnya, P ∧ Q bernilai SALAH sehingga (P ∧ Q)) => R bernilai BENAR.

   Jika P => (Q) => R) bernilai SALAH, maka P bernilai BENAR dan (Q => R) bernilai SALAH sehingga Q bernilai BENAR dan R bernilai SALAH.

   Akibatnya, (P ∧ Q)) => R bernilai SALAH.

Contoh 1.13

Tunjukkan keekivalenan berikut adalah BENAR dengan menggunakan aturanaturan yang sudah ada

1. -(Q ∧ P) ≡ P => -Q

2. $P \wedge [(P \wedge Q) \vee R] \equiv P \wedge (Q \vee R)$

Jawab.

Dengan aturan ekivalensi yang ada, kita peroleh

1. $-(Q \wedge P) \equiv Q \vee -P$ (De Morgan)

   $\equiv -P \vee -Q$ (Komutatif)

   $\equiv P => -Q$ (Implikasi Material)

2. $P \wedge [(P \wedge Q) \vee R] \equiv [P \wedge (P \wedge Q)] \vee (P \wedge R)$

   (Distributif)

   $\equiv [(P \wedge P) \wedge Q)] \vee (P \wedge R)$

   (Asosiatif)

   $\equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ (Idempoten)

   $\equiv P \wedge (Q \vee R)$ (Distributif)

1.4.2 Aturan Inferensi

Misalkan kita mempunyai satu atau lebih proposisi majemuk yang terdiri dari beberapa komponen. Pertanyaan yang timbul adalah dapatkah kita membentuk suatu proposisi lain yang dijamin kebenarannya? Ya, dan sudah seharusnya, karena dalam penalaran deduktif kita dapat membuat suatu konklusi berdasarkan proposisi-proposisi sebelumnya yang disebut premis. Kita dapat menyatakan premis baru (konklusi) diinferensikan dari proposisi-proposisi awal (premis). Jadi, aturan-aturan terkait proses ini yang sudah diuji kebenarannya disebut aturan-aturan inferensi. Kita akan perlihatkan bahwa aturan-aturan tersebut BENAR pada beberapa contoh berikut.

Contoh 1.14 (Modus Tollens)

Misalkan P =>Q dan -Q bernilai BENAR. Maka, Q bernilai SALAH.

Karena P => Q bernilai BENAR dan Q bernilai SALAH, maka P haruslah

bernilai SALAH. Akibatnya, -P akan bernilai BENAR.

Contoh 1.15 (Dilema Konstruktif)

Misalkan [(P => Q) ∧ (R =>S)] dan P V R bernilai BENAR.

Tabel 1.9 : Tabel Kebenaran Konstruktif

Nama Aturan	Premis	Konklusi
Simplikasi (S)	P ∧ Q	P
Penambahan (P)	P	P V Q
Konjungsi (K)	P, Q	P ∧ Q
Silogisme Disjungsi (SD)	P V Q, ¬P	Q
Modus Ponen (MP)	P => Q, P	Q
Modus Tollen (MT)	P => Q, ¬Q	¬P
Silogisme Hipotesis (SH)	P => Q, Q => R	P => R

Nama Aturan	Premis	Konklusi
Absorpsi (A)	$P \Rightarrow Q$	$P \Rightarrow (P \wedge Q)$
Dilemma Konstruksi (DK)	$(P \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow S)$, $P \vee R$	$Q \vee S$
Dilema Destruktif (DD)	$(P \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow S)$, $\neg Q \vee \neg S$	$\neg P \vee \neg R$

Maka, $(P \Rightarrow Q)$, $(R \Rightarrow S)$, dan $(P \vee R)$ semuanya bernilai BENAR. Karena $(P \vee R)$ bernilai BENAR, maka setidaknya satu dari keduanya bernilai BENAR.

Jika P yang bernilai BENAR, maka Q juga harus bernilai BENAR.

Hal yang sama juga berlaku untuk R dan S.

Jadi, setidaknya satu dari Q dan S harus bernilai BENAR.

Oleh karena itu, $Q \vee S$ bernilai BENAR.

1.5 Latihan

Kerjakan Soal di bawah ini !

1. Pernyataan $(\sim P \vee Q) \wedge (P \vee \sim Q)$ ekivalen dengan ...
   A. $p \Rightarrow q$
   B. $\sim P \Rightarrow q$
   C. $P \Rightarrow \sim q$
   D. $P \Leftrightarrow Q$

2. Nilai x yang menyebabkan pernyataan “jika x pangkat 2 + x = 6 maka x pangkat 2 + 3x   < 9 “ bernilai salah adalah
   A. -3
   B. -2
   C. 2
   D. 6

Bab 2

Argumen dan Kevalidannya

2.1 Pengertian Argumen

Pembuktian memegang peranan penting dalam matematika dan sebagian besar didasarkan pada penalaran deduktif, yaitu kesimpulan yang bersifat khusus diperoleh dari premis-premis yang bersifat umum.

Definisi (Argumen).

Suatu argumen terdiri dari sekelompok proposisi yang disebut ***premis*** dan satu kesimpulan dari kelompok proposisi tersebut yang disebut ***konklusi.***

Contoh 1. Saya akan pergi bekerja hari ini atau besok.

Saya tidak keluar rumah hari ini.

Jadi, saya akan pergi bekerja besok.

Contoh 2. Yang bersalah adalah Anto atau Bambang.

Yang bersalah adalah Bambang atau Cecep.

Jadi, yang bersalah adalah Anto atau Cecep.

Pada kedua contoh di atas, dua kalimat pertama adalah premis yang diasumsikan benar. Kalimat ketiga adalah kesimpulan yang perlu dipertanyakan kebenarannya.

Pada contoh 1, mungkinkah kesimpulannya salah karena mungkin saja ”saya” sakit sehingga tidak bisa bekerja besok? Jika ini terjadi, maka premis 1 menjadi tidak benar karena ”saya” di premis 2 tidak masuk hari ini dan juga tidak masuk besok. Sekalipun kita tidak bisa menggaransi kebenaran kesimpulan, tetapi kita tahu bahwa kesimpulan akan salah jika ada satu premis yang salah. Jika kedua premis benar, kita dapat memastikan bahwa kesimpulan juga benar. Disini kelihatan bahwa kesimpulan dipaksa oleh semua premis dan inilah yang menjadi standar yang kita gunakan untuk menguji kebenaran penalaran deduktif.

Kita katakan suatu argumen valid jika semua premis benar mengakibatkan kesimpulan menjadi benar. Sementara argumen menjadi tidak valid jika kesimpulan bisa salah sekalipun semua premis benar. Lihat Contoh 2 dimana jika yang bersalah adalah Bambang, maka Anto dan Cecep tidak bersalah sehingga kesimpulan menjadi salah sementara semua premis benar. Kita akan mendiskusikan beberapa metode untuk membuktikan kevalidan suatu argumen dan berlatih menggunakan bukti formal dengan simbol-simbol yang mewakili suatu proposisi.

2.2 Bukti Formal

Dalam pembuktian kevalidan dari argumen, kita menggunakan bukti formal, yaitu daftar proposisi yang berkaitan. Setiap proposisi yang ada dalam daftar harus memenuhi salah satu dari kriteria berikut:

1) Salah satu dari premis.
2) Inferensi (yang sesuai dengan aturan inferensi) dari satu atau lebih proposisi yang sudah ada di daftar.
3) Proposisi yang ekivalen (sesuai dengan aturan ekivalensi) dengan proposisi lain yang sudah ada pada daftar.

2.2.1 Metode Langsung

Jika kita diberikan suatu argumen dengan premis-premis P1, P2, .., Pn dan konklusi Q, maka metode langsung ini merupakan ide Mopus Ponens yang berbentuk:

$(P1 \wedge P2 \wedge \ldots\ldots \wedge Pn) = (Q)$

sehingga bukti formal kita akan dimulai dengan menuliskan premis-premis P1 sampai Pn, lalu proposisi-proposisi ekivalen/hasil inferensi, dan berakhir dengan munculnya konklusi Q.

Contoh :

Periksa kevalidan argumen berikut. Jika valid, buktikan dengan bukti formal:

Jika kontrak itu valid, maka Herman memiliki hutang.

Jika Herman memiliki hutang, maka ia akan bangkrut.

Kontrak itu valid.

Herman tidak akan bangkrut atau bank akan meminjaminya uang.

Jadi, bank tidak akan meminjaminya uang.

Simbolisasi:

K : Kontrak itu valid

H : Herman memiliki hutang

B : Herman akan bangkrut

M : Bank akan meminjaminya uang

Premis-premis: K = H, H = B, K

Konklusi: -M

Tabel 2.1 Bukti formal:

1	K = H	Premis 1
2	K = B	Premis 2
3	K	Premis 3
4	-B V M	Premis 4
5	K = B	1,3 SH
6	B	5,3 MP
7	M	4,6 SD

Jadi, argumen ini tidak valid karena pembuktian kita memberikan konklusi yang bertentangan dengan konklusi pada argumen.

Contoh :

Buktikan kevalidan argumen pengacara berikut:

Jika klien saya bersalah, maka pisau itu berada di dapur.

Pisau itu tidak di dapur atau Jono melihat pisau itu.

Jika pisau itu tidak ada di rumah pada tanggal 10 November, maka Jono tidak melihat pisau itu.

Lebih jauh lagi, jika pisau itu ada di rumah pada tanggal 10 November, maka pisau itu berada di dapur dan golok berada di gudang.

Tapi, kita semua tahu bahwa golok tidak berada di gudang.

Karena itu, hakim yang mulia, klien saya tidak bersalah.

Simbolisasi:

K : Klien saya bersalah

P : Pisau itu ada di dapur

J : Jono melihat pisau itu

N : Pisau itu ada di rumah pada tanggal 10 November

G : Golok ada di gudang.

Premis-premis: $K = P$, $-P \vee J$, $-N = -J$, $N = (P \wedge G)$

Konklusi: $-K$

Tabel 2.2 Bukti Formal:

1.	K = P	Premis 1
2.	-P V J	Premis 2
3.	-N = -J	Premis 3
4.	N = (P ∧ G)	Premis 4
5.	-G	Premis 5
6.	-G V –P	5 Penambahan
7.	-P V –G	6 Komutatif
8.	-(P ∧ G)	7 DeMorgan
9.	-N	4,8 MT
10.	-J	3,9 MP
11.	-P	2,10 SD
12.	-K	1,11 MT

Jadi, argumen si pengacara ini valid.

2.2.2 Bukti Bersyarat

Kita akan mulai bagian ini dengan sebuah contoh pembuktian (dengan metode langsung) kevalidan sebuah argumen dengan konklusi berupa implikasi.

Contoh :

Buktikan kevalidan argumen berikut:

Jika kita mengadakan pesta, maka kita harus mengundang Lina dan Beni.

Jika kita mengundang Lina atau Beni, maka kita harus mengundang Joko.

Jadi, jika kita mengadakan pesta, maka kita mesti mengundang Joko.

Simbolisasi:

P : Kita mengadakan pesta.

L : Kita mengundang Lina.

B : Kita mengundang Beni.

J : Kita mengundang Joko.

Premis-premis: $P = (L \wedge B)$, $(L \vee B) = J$

Konklusi: $P = J$

Tabel 2.3 Bukti Formal:

1.	P = (L ∧ B)	Premis 1
2.	(L V B) = J	Premis 2
3.	-P V (L ∧ B)	1 IM
4.	(-P V L) ∧ (-P V B)	3 Distributif
5.	-P V L	4 S
6.	P = L	5 IM
7.	-(L V B) ∧ J	2 IM
8.	(-L ∧ -B) ∧ J	7 DeMorgan
9.	(-L ∧ J) ∧ (¬B ∧ J)	8 Distributif
10.	-L ∧ J	9 S
11.	L = J	10 IM
12.	P = J	5,11 SH

Menggunakan metode langsung untuk konklusi berbentuk implikasi seperti contoh di atas tidaklah selalu mudah. Ketika mengalami kesulitan ada alat lain yang disebut Metode Bukti Bersyarat (BB). Idenya berasal dari aturan ekivalensi yang disebut Eksportasi/Importasi, yang diaplikasikan dalam bentuk lebih umum berikut.

[(P1 ∧ P2 ∧ …. ∧ Pn) = (Q) R)] = [(P1 ∧ P2 ∧ …. ∧ Pn ∧ Q) = R]

Keekivalenan ini meyakinkan kita bahwa argumen dengan premis-premis P1, P2, .., Pn dan konklusi Q) R adalah ekivalen dengan argumen yang premispremisnya

P1, P2, .., Pn, Q dan konklusinya R. Jadi, pada Metode Bukti Bersyarat ada proses mendaftarkan Q sebagai premis (tambahan) dan konklusi Q) R dalam bukti formal.

Contoh :

Buktikan kevalidan argumen berikut dengan menggunakan bukti bersyarat (BB):

Jika kita mengadakan pesta, maka kita harus mengundang Lina dan Beni.

Jika kita mengundang Lina atau Beni, maka kita harus mengundang Joko.

Jadi, jika kita mengadakan pesta, maka kita mesti mengundang Joko.

Simbolisasi:

P : Kita mengadakan pesta.

L : Kita mengundang Lina.

B : Kita mengundang Beni.

J : Kita mengundang Joko.

Premis-premis: $P = (L \wedge B)$, $(L \vee B) = J$

Konklusi: $P = J$

Tabel 2.4 Bukti Formal:

1	$P = (L \wedge B)$	Premis 1
2	$(L \vee B) = J$	Premis 2
3	P	BB
4	$L \wedge B$	1,3 MP
5	L	4 S
6	$L \vee B$	5 P
7	J	2,6 MP
8	$P = J$	3,7 BB

2.2.3 Metode Taklangsung

Metode lain yang dapat digunakan dalam pembuktian ini disebut reductio ad absurdum (RAA) atau bukti taklangsung. Pada metode ini, negasi dari konklusi (-Q) didaftarkan sebagai premis tambahan dan tujuan dari proses bukti formal adalah menemukan suatu kontradiksi (SALAH).

Dasar dari metode ini adalah argumen dengan premis-premis P1, P2, .., Pn dan konklusi Q ekivalen dengan argumen dimana premis-premisnya P1, P2, .., Pn,-Q dan konklusinya SALAH.

Penjelasannya sederhana. Kita tahu bahwa argumen dengan premis-premis P1, P2, .., Pn dan konklusi Q valid ketika $P1 \wedge P2 \wedge \ldots \wedge Pn \wedge Q$ bernilai BENAR. Konjungsi tersebut bernilai BENAR jika semua komponen dari konjungsi tersebut bernilai BENAR. Sebagai konsekuensinya, P1 ∧ P2 ∧ .... ∧ Pn ∧ -Q akan bernilai SALAH karena Q bernilai BENAR.

Contoh :

Buktikan kevalidan argumen berikut dengan bukti taklangsung (*reductio ad absurdum*):

Jika Joko bermain sebagai bek, dan Sanip bermain di tim lawan, maka tim wartawan akan menang.

Tim wartawan tidak akan menang, atau tim itu akan berada di peringkat terbawah.

Tim wartawan tidak berada di peringkat terbawah.

Joko bermain sebagai bek.

Jadi, Sanip tidak akan bermain di tim lawan.

Simbolisasi:

J : Joko bermain sebagai bek

S : Sanip bermain di tim lawan

W : Tim wartawan akan menang

T : Tim wartawan berada di peringkat terbawah.

Premis-premis: (J ∧ S) = W, -W V T, -T, J

Konklusi: -S

Tabel 2.5 Bukti Formal:

1.	$(J \wedge S) = W$	Premis 1
2.	$-W \vee T$	Premis 2
3.	$-T$	Premis 3
4.	J	Premis 4
5.	S	RAA
6.	$J \wedge S$	4,5 Konjungsi
7.	W	1,6 MP
8.	T	2,7 SD
9.	$-T \wedge T$	3,8 Konjungsi
10.	SALAH	9 Identitas
11.	$-S$	5 RAA

Contoh :

Buktikan kevalidan argumen berikut dengan bukti taklangsung(*reductio ad absurdum*):

Jika polisi tidak menerima suap atau tersangka berbohong, maka suatu kejahatan terjadi. Ayah tersangka sedang keluar kota.

Jika suatu kejahatan terjadi, maka ayah tersangka sedang berada di kota.

Karena itu, polisi menerima suap.

Simbolisasi:

P : Polisi tidak menerima suap

T : Tersangka berbohong

K : Kejahatan terjadi

A : Ayah tersangka berada di kota.

Premis-premis: (P V T) = K, -A, K = A

Konklusi: -P

Tabel 2.6 Bukti Formal:

1.	(P V T) = K	Premis 1
2.	-A	Premis 2
3.	K = A	Premis 3
4.	P	RAA
5.	P V T	4 Penambahan
6.	K	1,5 MP
7.	A	3,6 MP
8.	-A ∧ A	2,7 Konjungsi
9.	SALAH	8 Komplemen
10.	-P	4 RAA

2.3 Latihan

1. Buktikan kevalidan argumen-argumen berikut dengan simbol-simbol yang sudah ditetapkan.
   (a) Jika program ini efisien, maka ia akan mengeksekusi dengan cepat. Program ini efisien atau ia mengandung virus. Program ini tidak mengeksekusi dengan cepat. Oleh karenanya, program ini memiliki virus. Simbolisasi: E, C, V
   (b) Tanaman di kebun tumbuh dengan baik, tetapi tidak tersedia cukup air. Jika sering hujan atau tidak banyak cahaya matahari, maka tersedia cukup air. Oleh karena itu, tanaman di kebun tumbuh dengan baik dan banyak cahaya matahari. Simbolisasi: T, A, H, M
2. Gunakan bukti bersyarat untuk menunjukkan kevalidan argumen berikut.
   (a) Logika itu sulit atau tidak banyak mahasiswa yang menyukainya. Jika matematika itu mudah, maka logika tidak sulit. Jadi, jika banyak mahasiswa yang menyukai logika, maka matematika tidak mudah. Simbolisasi: L, B, M.
   (b) Jika Partai Kecu menang pemilu, maka pajak akan naik dan akan banyak rakyat miskin. Jika pajak naik dan banyak rakyat miskin, maka saya akan menjadi calon walikota. Saya tidak akan menjadi calon walikota. Karena itu, jika

Partai Kecu menang pemilu, maka pajak akan naik. : K, P, R, W.

3. kevalidan argumen berikut dengan RAA (bukti taklangsung).
   (a) Jika Budi mengikuti saranku atau mendengarkan hati nuraninya, ia pasti sudah menjual rumahnya dan pindah ke kampung. Jika ia menjual rumahnya, maka Rosa akan membelinya.
   Rosa tidak membeli rumahnya.
   Jadi, Budi tidak mengikuti saranku.
   Simbolisasi: S, H, J, P, R.
   (b) Jika pasukan PETA lengkap, maka Supriyadi akan memenangkan pertempuran. Dukungan dari tiga sayap artileri tersedia atau Supriyadi tidak memenangkan pertempuran. Juga, ini bukan masalah pasukan PETA lengkap dan ketersediaan dukungan dari tiga sayap artileri.
   Jadi, pasukan PETA tidak lengkap.
   Simbolisasi: P, S, D.

Bab 3

Logika Predikat

Logika adalah bagian dari matematika, tetapi pada saat yang sama juga merupakan bahasa matematika. Pada akhir abad ke-19 dan awal abad ke-20, ada kepercayaan bahwa semua hal dalam matematika bisa direduksi menjadi logika simbolik dan bisa dibuat menjadi formal sepenuhnya. Kepercayaan ini, walaupun masih dipegang dalam bentuk modifikasinya sekarang ini, telah digoyahkan oleh K. G¨odel pada tahun 1930 ketika ia menunjukkan bahwa selalu ada sejumlah kebenaran yang tidak bisa diturunkan dalam sistem formal apapun. Studi tentang logika simbolik biasanya dibagi menjadi beberapa bagian. Yang pertama dan paling mendasar adalah logika proposisi. Di atasnya nanti adalah logika predikat yang merupakan bahasa matematika.

3.1 Logika Predikat

Logika predikat digunakan untuk merepresentasikan hal-hal yang tidak dapat direpresentasikan dengan menggunakan logika proposisi. Logika predikat digunakan untuk merepresentasikan fakta sebagai suatu pernyataan yang dikenal dengan wff (well-formed formula). Logika predikat merupakan pengembangan dari logika proposisional dengan masalah pengkuantoran dan menambah istilah-istilah baru.

Istilah dalam Logika Predikat

- Term : kata benda atau subjek
- Predikat : properti dari term
- Fungsi proposisional fungsi
- Kuantor
  - ✓ Universal: yang selalu bernilai benar (∀).
  - ✓ Eksistensial: bisa bernilai benar atau salah(∃).

a. Operator Logika Predikat

Implikasi : (⇒)

Not : (-)

And : (∧)

Or : (∨)

Untuk setiap : (∀)

Terdapat : (∃)

Baik Kita akan memulai bagian ini dengan dua argumen.

- Premis A: Semua orang menyukai Ali.

Konklusi B: Budi menyukai Ali.

- Premis C: Cecep menyukai Ali.

  Konklusi D: Seseorang menyukai Ali.

Jika kita menggunakan logika proposisi untuk memeriksa kevalidan kedua argumen di atas, maka akan ada kemungkinan kedua argumen tersebut tidak valid jika A dan C bernilai BENAR, tapi B dan D bernilai SALAH. Namun, perasaan kita mengatakan bahwa kedua argumen di atas seharusnya valid. Dengan demikian, logika proposisi yang sudah kita pelajari tidak lagi memadai untuk digunakan dalam memeriksa argumen seperti di atas. Kita membutuhkan jenis logika yang lain yang disebut logika predikat.

Logika predikat berkaitan dengan proposisi yang menyatakan:

1. Sesuatu tentang suatu objek, seperti ”Adam berkulit hitam.”
2. Hubungan antara objek, seperti ”Romeo menyukai Juliet.”

Ada tiga komponen dari logika predikat, yaitu:

1. Objek, seperti: Romeo, mahasiswa, bola, dll.
2. Predikat, menggambarkan karakteristik dari objek atau hubungan antara objek-objek, seperti pintar, menyayangi, bulat, dll.
3. Kuantor, menyatakan kuantitas dari objek, yang terdiri dari dua jenis, yaitu:

(a) kuantor universal yang ditunjukkan dengan kata semua, untuk setiap, dan yang sejenisnya.
(b) kuantor eksistensial yang ditunjukkan dengan kata ada, terdapat, beberapa, dan sejenisnya

Contoh (Proposisi dalam Logika Predikat)

Semua mahasiswa pintar.

Beberapa bola adalah bundar.

Ada mahasiswa menendang bola

b. Simbolisasi pada Logika Predikat

Perlambangan pada logika predikat untuk masing-masing komponen adalah sebagai berikut:

1. Predikat dilambangkan dengan huruf besar
2. Objek dilambangkan dengan huruf kecil mengikuti predikat. Jika ada dua objek, urutannya adalah pelaku-penderita.
3. Jika ada kuantor, maka kuantor ditulis terlebih dahulu kemudian diikuti oleh objek dan proposisi predikat.

Jika suatu karakteristik P dimiliki oleh semua x anggota dari himpunan S, kita tulis ”$\forall\ x \in S, P(x)$” yang berarti $P(x)$ bernilai BENAR untuk semua $x \in S$. Sementara, jika karakteristik tersebut hanya dimiliki sebagian anggota dari S, kita tulis ”$\exists\ x \in S, P(x)$”, yang berarti $P(x)$ bernilai BENAR setidaknya untuk satu anggota S. Untuk membuktikannya, kita hanya membutuhkan satu anggota S yang memenuhi kriteria/sifat tersebut.

Contoh (Perlambangan dan maknanya)

1. Proposisi ”Adi berkulit hitam” dilambangkan dengan Ha dimana H lambang untuk berkulit hitam (predikat) dan a melambangkan Adi (objek)
2. Proposisi ”Romeo mencintai Juliet” dilambangkan dengan Crj dimana C adalah lambang untuk mencintai (predikat), r melambangkan Romeo (objek/pelaku), dan j melambangkan Juliet (objek/penderita).
3. $\forall p$, Mpw bisa digunakan untuk melambangkan ”Semua pria menyukai wanita”. M melambangkan menyukai (predikat), p melambangkan pria (objek/pelaku), dan w melambangkan wanita (objek/penderita).
4. $\forall x, Sx \Rightarrow Ax$ melambangkan ”Semua anak Susilo juga anak Ani”.
5. $\exists x, Sx \wedge Ax$ melambangkan ”Ada anak Susilo yang juga anak Ani”.
6. $\forall x, \forall y, Bxy \Rightarrow Ayx$ melambangkan ”Semua orang yang merupakan bapak dari seseorang juga merupakan anak dari seseorang”.
7. $\forall x, \exists y, Cyx$ melambangkan ”Setiap orang memiliki seseorang yang mencintainya.”

Perhatikan contoh di atas untuk nomor 4 dan 5 yang menunjukkan pengaruh kuantor terhadap proposisi predikat. Untuk menyatakan ”juga/adalah”, kuantor universal terkait dengan implikasi, sedangkan kuantor eksistensial terkait dengan konjungsi.

3.2 Aturan Penyangkalan

Aturan ekivalensi pada logika proposisi semuanya berlaku juga pada logika predikat. Satu aturan ekivalensi tambahan pada logika predikat adalah aturan penyangkalan.

$$\neg(\forall x \exists y, P\, xy) \equiv (\exists x \forall y, \neg P\, xy)$$

$$\neg(\exists x \forall y, P\, xy) \equiv (\forall x \exists y, \neg P\, xy)$$

Secara sederhana aturan ini bisa dimaknai: ketika kita mendorong tanda negasi ke dalam proposisi, kuantornya akan berubah dari $\forall$ menjadi $\exists$ atau sebaliknya, dan proposisi predikatnya akan berubah menjadi ingkarannya.

Contoh .

$(\exists x \in N)(\forall y \in N)(2y < x)$ adalah negasi dari

$(\forall x \in N)(\exists y \in N)(2y > x)$

Contoh .

Proposisi "Takseorangpun koruptor yang menyesal" dapat kita lambangkan dengan $\forall x$, $Kx \Rightarrow \neg Mx$ karena ekivalen dengan $\neg(\exists x, Kx \wedge Mx)$

3.3 Aturan Inferensi

Semua aturan inferensi pada logika proposisi juga berlaku pada logika predikat ditambah aturan-aturan berikut.

Tabel 3.1: Aturan Inferensi Pada Logika Predikat

Nama Aturan	Premis	Konklusi
Pengkhususan Universal	(KU) ∀x,	P x P a untuk sebarang a
Perumuman Universal (UU)	P a untuk sebarang a	∀x, P x
Pengkhususan Eksistensial (KE)	∃x, P x	P a untuk suatu a
Perumuman Eksistensial (UE)	P a untuk suatu a	∃x, P x

Kuantor eksistensial memiliki tingkatan yang lebih rendah dari kuantor universal sehingga dalam suatu argumen yang memuat kedua kuantor, konklusinya haruslah dalam bentuk kuantor eksistensial.

Contoh .

Buktikan kevalidan argumen berikut:

Ada ilmuwan yang tidak rabun dekat. Semua orang yang memakai kacamata adalah rabun dekat. Semua orang memakai kacamata atau lensa kontak. Karena itu, beberapa ilmuwan memakai lensa kontak.

Simbolisasi:

x : orang

Ix : x adalah ilmuwan

Rx : x rabun dekat

Kx : x berkacamata

Lx : x memakai lensa kontak.

Premis-premis: $(\exists x, Ix \wedge \neg Rx)$, $(\forall x, Kx \Rightarrow Rx)$, $(\forall x, Kx \vee Lx)$

Konklusi: $\exists x, Ix \wedge Lx$

Tabel 3.2 Bukti Formal

1	$\exists x, Ix \wedge \neg Rx$	Premis 1
2	$\forall x, Kx \Rightarrow Rx$	Premis 2
3	$\forall x, Kx \vee Lx$	Premis 3
4	$Ia \wedge \neg Ra$	1 KE
5	$Ka \Rightarrow Ra$	2 KU
6	$Ka \vee La$	3 KU
7	$\neg Ra$	4 Simplifikasi
8	$\neg Ka$	5,7 MT
9	La	6,8 SD
10	la	4 Simplifikasi
11	$Ia \wedge La$	10,9 Konjungsi
12	$\exists x, Ix \wedge Lx$	11 UE

Contoh

Buktikan kevalidan argumen berikut: Semua orang Minang menghormati orang yang mereka kenal dengan baik. Tak ada orang Minang yang menghormati orang yang tidak beradat. Jadi, semua orang Minang hanya mengenal dengan baik orang yang beradat.

Simbolisasi:

x, y : orang

Mx : x orang Minang

Hxy : x meghormati y

Kxy : x mengenal dengan baik y

Bx : x orang beradat.

Premis-premis:

$(\forall x, Mx) \Rightarrow (\forall x \forall y, Kxy \Rightarrow Hxy)$,

$(\forall x, Mx) \Rightarrow (\forall x \forall y, \neg Bx \Rightarrow \neg Hxy)$

Konklusi:

$(\forall x, Mx) \Rightarrow (\forall x \forall y, Kxy \Rightarrow Bx)$

Tabel 3.3 Bukti Formal

1	$(\forall x, Mx) \Rightarrow (\forall x \forall y, Kxy \Rightarrow Hxy)$	Premis 1
2	$(\forall x, Mx) \Rightarrow (\forall x \forall y, \neg Bx \Rightarrow \neg Hxy)$	Premis 2
3	$M\,a \Rightarrow (\forall y, Kay \Rightarrow Hay)$	1 KU
4	$M\,a \Rightarrow (\forall y, \neg Ba \Rightarrow \neg Hay)$	2 KU
5	$M\,a$	BB
6	$\forall y, Kay$	Hay 3,5 MP
7	$\forall y, \neg Ba$	¬Hay 4,5 MP
8	$\forall y, Hay \Rightarrow Ba$	Ba 7 Kontraposisi
9	$\forall y, Kay \Rightarrow Ba$	Ba 6,8 SH
10	$M\,a \Rightarrow (\forall y, Kay \Rightarrow Ba)$	5,9 BB
11	$(\forall x, Mx) \Rightarrow (\forall x \forall y, Kxy \Rightarrow Bx)$	10 UU

Mari kita kerjan bersama untuk menambahkan pemahaman kita akan logika predikat
Ubah dalam bentuk logika predikat :

1. Jika Siti mirip Dewi dan Dewi mirip Santi, maka Siti mirip Santi.
2. Badu sangat sibuk, tetapi Dito tidak.

3. Amir kenal Bapak Bowo, tetapi Pak Bowo tidak kenal Amir.
4. Tidak semua orang kaya raya.
5. Semua harimau adalah pemangsa.
6. Ada harimau yang hanya memangsa kijang.

Penyelesaian :

- Jika Siti mirip Dewi dan Dewi mirip Santi, maka Siti mirip Santi.
  - Term: S = Siti, D = Dewi, N = Santi
  - Predikat: M = Mirip
  - Fungsi: $(M(S,D) \wedge M(D,N)) \rightarrow M(S,N)$
- Badu sangat sibuk, tetapi Dito tidak.
  - Term: B = Badu, D = Dito
  - Predikat: S = Sibuk
  - Fungsi: $S(B) \wedge \sim S(D)$
- Amir kenal Bapak Bowo, tetapi Pak Bowo tidak kenal Amir.
  - Term : A = Amir, B = Bowo
  - Predikat : K = kenal
  - Fungsi: $K(A,B) \wedge \sim K(B,A)$

3.4 Latihan Soal

Kerjakan soal dibawah ini!

(untuk mengetahui apakah kalian sudah paham akan logika predikat)

1. Lambangkan proposisi-proposisi berikut.
   (a) Ana adalah teman Doni dan Paijo adalah temanku.
   (b) Semua teman Doni bukanlah temanku.
   (c) Beberapa temanku adalah teman Paijo dan beberapa teman Paijo anggota geng motor.
   (d) Tidak seorangpun mahasiswa baru yang tidak serius.
   (e) Ada mahasiswa senior yang suka Matematika, tapi tidak suka Bahasa Inggris.
2. Jika Mxy berarti "x menyukai y", jelaskan makna dari simbol-simbol berikut.
   (a) $\forall x, \forall y, Mxy$
   (b) $\forall x, \exists y, Mxy$
   (c) $\exists y, \forall x, Mxy$
   (d) $\exists x, \forall y, \neg Mxy$
   (e) $\exists x, \exists y, Mxy$
   (f) $\exists y, \exists x, \neg Mxy$
3. Misakan P(x), Q(x), R(x), dan S(x) adalah proposisi yang menyatakan berturut-turut "x adalah orang Minang", "x adalah penduduk nagari", "x adalah pegawai negeri", dan "x ingin korupsi". Ekspresikan pernyataanpernyataan berikut dalam simbol logika predikat.
   (a) Tidak seorangpun orang Minang ingin korupsi.
   (b) Tidak seorangpun pegawai negeri anti korupsi.
   (c) Semua penduduk nagari adalah orang Minang.
   (d) Semua penduduk nagari bukan pegawai negeri.
4. Buktikan kevalidan argumen berikut.

(a) Sejumlah tanaman adalah bunga. Semua bunga beraroma wangi. Jadi, beberapa tanaman beraroma wangi. T x, Bx, W x.
(b) Ada orang yang tampan dan jujur. Semua orang jujur miskin. Karena itu, ada orang yang tampan dan miskin. T x, Jx, Mx.
(c) Setiap orang dibayar bulanan atau bekerja paruh-waktu. Setiap orang bekerja dua hari seminggu atau tidak bekerja paruh-waktu. Karena itu, setiap orang yang tidak dibayar bulanan bekerja dua hari seminggu. Bx, P x, Dx
(d) Setiap orang yang tinggal di Jakarta atau Bandung adalah urban dan intelektual. Karena itu, setiap orang yang tinggal di Jakarta adalah urban. Jx, Bx, Ux, Ix Logika Predikat 9
(e) Semua bilangan yang merupakan bilangan bulat adalah genap atau ganjil. Semua bilangan yang merupakan bilangan bulat adalah genap atau taknol. Ada bilangan yang merupakan bilangan bulat. Jadi, ada bilangan yang genap atau tergolong ganjil dan taknol. Bx, P x, Lx, T x.
(f) Semua mahasiswa yang hadir kuliah PDM dan ikut ujian terdaftar pada matakuliah ini. Tidak seorangpun mahasiswa yang terdaftar pada matakuliah ini ikut ujian. Ada mahasiswa yang hadir kuliah. Karena itu, ada mahasiswa yang tidak ikut ujian. Hx, Ux, T x.

Bab 4

Induksi Matematika

4.1 Penalaran Induktif

Penalaran adalah proses berpikir yang bertolak dari pengamatan indera (observasi empirik) yang menghasilkan sejumlah konsep dan pengertian. Berdasarkan pengamatan yang sejenis juga akan terbentuk proposisi-proposisi yang sejenis, berdasarkan sejumlah proposisi yang diketahui atau dianggap benar, orang menyimpulkan sebuah proposisi baru yang sebelumnya tidak diketahui. Proses inilah yang disebut menalar.

Menurut Jujun Suriasumantri, Penalaran adalah suatu proses berfikir dalam menarik suatu kesimpulan yang berupa pengetahuan. Sebagai suatu kegiatan berfikir penalaran memiliki ciri-ciri tertentu. Ciri pertama adalah proses berpikir logis, dimana berpikir logis diartikan sebagai kegiatan berpikir menurut pola tertentu atau dengan kata lain menurut logika tertentu. Ciri yang kedua adalah sifat analitik dari proses berpikirnya. Sifat analitik ini merupakan konsekuensi dari adanya suatu pola berpikir tertentu.

Penalaran dibagi menjadi dua, yaitu penalaran deduktif dan penalaran induktif. Penalaran deduktif dikembangkan oleh Aristoteles, Thales, Pythagoras, dan para filsuf Yunani lainnya dari Periode Klasik (600-300 SM.). Aristoteles. Penalaran induktif adalah proses berpikir untuk menarik kesimpulan berupa prinsip atau sikap yang berlaku umum berdasarkan atas fakta-fakta yang bersifat khusus. Prosesnya disebut induksi. Penalaran induktif dapat berbentuk generalisasi, analogi, atau hubungan sebab akibat.

a. Generalisasi

Generalisasi adalah proses berpikir berdasarkan hasil pengamatan atas sejumlah gejala dan fakta dengan sifat-sifat tertentu mengenai semua atau sebagian dari gejala serupa itu. Analogi merupakan cara menarik kesimpulan berdasarkan hasil pengamatan terhadap sejumlah gejala khusus yang bersamaan. Hubungan sebab akibat ialah hubungan ketergantungan antara gejala-gejala yang mengikuti pola sebab akibat, akibat sebab, dan akibat-akibat.

Contoh penalaran induktif :

Harimau berdaun telinga berkembang biak dengan melahirkan. Babi berdaun telinga berkembang biak dengan melahirkan. Ikan paus berdaun telinga berkembang biak dengan melahirkan.

Contoh generalisasi :

Pemakaian bahasa Indonesia deseluruh daerah diindonesia dewasa ini belum dapat dikata seragam.

Perbedaan dalam struktur kalimat, lagu kalimat, ucapan terlihan dengan mudah. Pemakaian bahasa Indonesia sebagai bahasa pergaulan sering dikalahkan oleh bahasa daerah. Diungkapkan persurat kabaran, radio, dan TV pemakaian bahasa indonesia belum lagi dapat dikatakan sudah terjaga baik. Para pemuka kita pun pada umumnya juga belum memperlihatkan penggunaan bahasa Indonesia yang terjaga baik. Fakta-fakta diatas menunjukan bahwa pengajaran bahasa Indonesia perlu ditingkatkan.

Macam-macam generalisasi :

(1) Generalisasi sempurna

Adalah generalisasi dimana seluruh fenomena yang menjadi dasar penyimpulan diselidiki. Generalisasi macam ini memberikan kesimpulan amat kuat dan tidak dapat diserang. Tetapi tetap saja yang belum diselidiki.

(2) Generalisasi tidak sempurana

Adalah generalisasi berdasarkan sebagian fenomena untuk mendapatkan kesimpulan yang berlaku bagi fenomena sejenis yang belum diselidiki.

Penalaran generalisasi bertolak dari satu atau sejumlah fakta (fenomena atau peristiwa) khusus yang mempunyai kemiripan untuk membuat sebuah kesimpulan. Sejumlah peristiwa khusus dibuat dalam bentuk kalimat, kemudian pada akhir paragraf diakhiri dengan kalimat yang berisi generalisasi dari peristiwa. Peristiwa khusus yang disebutkan pada bagian awal.

b. Analogi

Analogi adalah membandingkan dua hal yang banyak persamaanya. Kesimpulan yang diambil dengan jalan analogi, yakni kesimpulan dari pendapat khusus dari beberapa pendapat khusus yang lain, dengan cara membandingkan situasi yang satu dengan yang sebelumnya. Dalam berfikir Analogis, kita meletakan suatu hubungan baru berdasarkan hubungan-hubungan baru itu. Dan kita juga dapat menarik kesimpulan bahwa jika sudah ada persamaan dalam berbagai segi, ada persamaan pula dalam bidang yang lain. Pada pembentukan kesimpulan dengan jalan analogi, jalan pikiran kita didasarkan atas persamaan suatu keadaan yang khusus lainnya. Karena pada dasarnya hanya membandingkan persamaan-persamaan dan kemudian dicari hubungannya. Maka sering kesimpulan yang diambil tidak logis.

Dari penjabaran di atas, dapat dikatakan bahwa penalaran analogi adalah proses penyimpulan berdasarkan fakta atau kesamaan data. Analogi juga dapat dikatakan sebagai proses membandingkana dari dua hal yang berlainan berdasarkan kesamaannya kemudian berdasarkan kesamaannya itu ditarik suatu kesimpulan.

Contoh Analogi:

Kita banyak tertarik dengan planel mars, karena banyak persamaannya dengan bumi kita. Mars dan Bumi menjadi anggota tata surya yang sama. Mars mempunyai atsmosfir seperti bumi. Temperaturnya hampir sama dengan bumi. Unsur air dan oksigennya juga ada.

Caranya mengelilingi matahari menyebabkan pula timbulanya musim seperti bumi. Jika bumi ada mahluk. Tidaklah mungkin ada mahluk hidup diplanet Mars.

Hubungan akibat sebab

Hubungan akibat sebab merupakan suatu proses berfikir dengan bertolak dari suatu peristiwa yang dianggap sebagai akibat, kemudian bergerak menuju sebab-sebab yang mungkin telah menimbulkan akibat tadi.

Contoh :

Masalah pengangguran merupakan masalah serius yang harus diselesaikan pemerintah, seperti beberapa waktu lalu diberitakan dimedia cetak dan ibu kota, bagaimana ribuan pencari kerja harus berdesakan bahkan pingsan untuk mendapatkan pekerjaan. Menurut laporan media cetak hal ini terjadi karena dalam waktu dekat ini banyak perusahaan menufaktor yang akan tutup. Sehingga harus melakukan PHK. Selain itu minimnya kahlian atau rendahnya kualitas SDM menjadi faktor penyebab banyaknya pengangguran diibukota.

Contohnya dalam menggunakan preposisi spesifik seperti: Es ini dingin. (atau: Semua es yang pernah kusentuh dingin.) Bola biliar bergerak ketika didorong tongkat. (atau: Dari seratus bola biliar yang didorong tongkat, semuanya bergerak.

4.2 Prinsip Induksi Matemaika

Induksi matematika merupakan materi yang menjadi perluasan dari logika matematika. Logika matematika sendiri mempelajari pernyataan yang bisa bernilai benar atau salah, ekivalen atau ingkaran sebuah pernyataan, dan juga berisi penarikan kesimpulan. Induksi matematika menjadi sebuah metode pembuktian secara deduktif yang digunakan untuk membuktikan suatu pernyataan benar atau salah. Dimana merupakan suatu proses atau aktivitas berpikir untuk menarik kesimpulan berdasarkan pada kebenaran pernyataan yang berlaku secara umum sehingga pada pernyataan khusus atau tertentu juga bisa berlaku benar. Dalam induksi matematika ini, variabel dari suatu perumusan dibuktikan sebagai anggota dari himpunan bilangan asli.

Ada tiga langkah dalam induksi matematika yang diperlukan untuk membuktikan suatu rumus atau pernyataan. Langkah-langkah tersebut adalah :

Membuktikan bahwa rumus atau pernyataan tersebut benar untuk $n = 1$.

Mengasumsikan bahwa rumus atau pernyataan tersebut benar untuk $n = k$.

Membuktikan bahwa rumus atau pernyataan tersebut benar untuk $n = k + 1$.

Untuk menerapkan induksi matematika, kita harus bisa menyatakan pernyataan $P(k + 1)$ ke dalam pernyataan $P(k)$ yang diberikan. Untuk meyatakan persamaan $P(k + 1)$, substitusikan kuantitas $k + 1$ kedalam pernyataan $P(k)$.

Jenis Induksi Matematika

Deret Bilangan

Sebagai ilustrasi dibuktikan secara induksi matematika bahwa

$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

Langkah 1

untuk n = 1, maka :

$1=\frac{1}{2}n(n+1)$

$1=\frac{1}{2}(1)(1+1)$

1 = 1

Bentuk untuk n = 1 rumus tersebut benar.

Langkah 2

Misal rumus benar untuk n = k, maka:

$1+2+3+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$

Langkah 3

Akan dibuktikan bahwa rumus benar untuk n = k + 1. Sehingga:

$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{1}{2}(k+1)((k+1)+1)$

Pembuktiannya:

$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)$

(dalam langkah 2, kedua ruas ditambah k + 1)

$=\frac{1}{2}k(k+1)+\frac{1}{2}[2(k+1)]$. (k + 1) dimodifikasi menyerupai $\frac{1}{2}k(k+1)$)

$=\frac{1}{2}[k(k+1)+2(k+1)]$ (penyederhanaan)

$= \frac{1}{2}(k^2 + k + 2k + 2)$

$= \frac{1}{2}(k^2 + 3k + 2)$

$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$

(terbukti)   Bilangan bulat hasil pembagian

Suatu bilangan dikatakan habis dibagi jika hasil pembagian tersebut adalah bilangan bulat. Sebagai ilustrasi, dibuktikan secara induksi matematika bahwa $5^{2n} + 3n - 1$habis dibagi 9.

Langkah 1

untuk n = 1, maka:

$5^{2n} + 3n - 1 = 5^{2(1)} + 3(1) - 1$

$= 5^2 + 3 - 1$

= 27

27 habis dibagi 9, maka n = 1 benar.

Langkah 2

Misal rumus benar untuk n = k, maka :

$5^{2n} + 3n - 1 \xrightarrow{menjadi} 5^{2k} + 3k - 1$ (habis dibagi 9)

$5^{2k} + 3k - 1 = 9b$ (b merupakah hasil bagi $5^{2k} + 3k - 1$ oleh 9)

Langkah 3

Akan dibuktikan bahwa rumus benar untuk n = k + 1. Pembuktian:

$5^{2(k+1)} + 3(k+1) - 1$

$= 5^{2k+2} + 3k + 3 - 1$

$= 5^2(5^2k) + 3k + 3 - 1$

kemudian (5^{2k}) dimodifikasi dengan memasukan $5^{2k} + 3k - 1$

$= 25(5^{2k} + 3k - 1) - 75k + 25 + 3k + 3 - 1$

$= 25(5^{2k} + 3k - 1) - 72k + 27$

$= 25(9b) - 72k + 27$

$= 9(25b - 8k + 3)$... akan habis dibagi oleh 9 (terbukti)

Contoh Soal Induksi Matematika dan Pembahasan

1. Buktikan bahwa

   $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

Pembahasan:

Langkah 1 $1^3 = \frac{1}{4}(1)^2(1+1)^2 = \frac{2^2}{4}$

$1 = 1$ (terbukti)

Langkah 2 (n = k)

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \frac{1}{4}k^2(k+1)^2$

Langkah 3 (n = k + 1)

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3(k+1)^3 = \frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^3$.

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 + (k+1)^3 = \frac{1}{4}k^2(k+1)^2 + (k+1)^3$

(kedua ruas ditambah $(k+1)^3$.

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+(k+1)^3=(k+1)^2(\tfrac{1}{4}k^2+(k+1))$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=(k+1)$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\tfrac{1}{4}(k+1)^2(k^2+4k+4)$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\tfrac{1}{4}(k+1)^2(k+2)(k+2)$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\tfrac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2$$

{terbukti).

2. Buktikan bahwa

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{2^2}+\tfrac{3}{2^3}+\cdots+\tfrac{n}{2^n}=2-\tfrac{n+2}{2^n}$$

Pembahasan:

Langkah 1

$$\tfrac{1}{2}=2-\tfrac{(1)+2}{2^1}=2-\tfrac{3}{2}$$

$\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}$ (terbukti)

Langkah 2 (n = k)

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{2^2}+\cdots+\tfrac{2}{2^k}=2-\tfrac{k+2}{2^k}$$

Langkah 3 (n = k + 1)

Dibuktikan dengan:

(kedua ruas dikali $\frac{k+1}{2^{k+1}}$)

$$=2-\tfrac{2(k+2)}{2^{(k+1)}}+\tfrac{k+1}{2^{k+1}}$$

(2^k dimodifikasi menjadi 2^{k+1})

$$=2-\tfrac{2k+4}{2^{(k+1)}}+\tfrac{k+1}{2^{k+1}}$$

$= 2 + \frac{k+1-(2k+4))}{2^{(k+1)}}$

$= 2 - \frac{k+3}{2^{(k+1)}}$ (terbukti)

3. Buktikan bahwa $3^{2n} + 22n + 2$

   (habis dibagi 5).

Pembahasan:

Langkah 1

$3^{2(1)} + 2^{2(1)+2} = 3^2 + 2^4 = 9 + 16 = 25$

habis dibagi 5 (terbukti)

Langkah 2

(n = k)$3^{2k} + 2^{2k+2}$

Langkah 3

(n = k + 1)

$3^{2(k+1)} + 2^{2(k+1)+2}$

$= 3^{2k+2} + 2^{2k+2+2}$

$= 3^2(3^{2k}) + 2^2(2^{2k+2})$

(dalam kurung dibuat sama dengan bentuk soal)

$= 10(3^{2k}) + 5(2^{2k+2}) - 3^{2k} - 2^{2k+2}$

(3^2 dibuat 10 dan 2^2dibuat 5, agar bisa dibagi 5)

$= 10(3^{2k}) + 5(2^{2k+2}) - (3^{2k} + 2^{2k+2})$

Didapatkan :

$10(3^{2k})$habis dibagi 5

$5(2^{2k+2})$habis dibagi 5

$-(3^{2k}) + 2^{2k+2}$

(sama dengan langkah 2, habis dibagi 5)

4.3 Prinsip Induksi Kuat

Misalkan P(n) adalah pernyataan yang terkait dengan bilangan asli n. Prinsip Induksi Kuat berbunyi sebagai berikut: Jik P(1) benar, dan jika $P(1), \ldots, P(k)$ benar, maka $P(k+1)$ benar, *maka* $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n. Baik Prinsip Induksi Matematika maupun Prinsip Induksi Kuat dapat diperumum untuk pernyataan $P(n)$ dengan $n \geq n_0$ (alih-alih $n \geq 1$.) Persisnya, *jika* $P(n_0)$ benar, dan jika $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$ benar, *maka* $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq n_0$.

Demikian juga *jika* $P(n_0)$ benar, dan jika $P(n_0), \ldots, P(k)$ benar, maka $P(k+1)$ benar,

maka $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq n_0$.

Contoh aplikasi Prinsip Induksi Kuat adalah dalam pembuktian Teorema Dasar Aritmetik, yang menyatakan bahwa setiap bilangan asli $n \geq 2$ dapat dinyatakan secara tunggal sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima.

Jelas bahwa pernyataan di atas benar untuk $n = 2$, karena 2 adalah bilangan prima dan $2 = 2$. Selanjutnya misalkan pernyataan benar untuk $n = 2, \ldots, k.$ Kita akan menyelidiki kebenaran pernyataan untuk $n = k + 1.$ Jika $k + 1$ adalah bilangan prima, maka pernyataan tentu saja benar.

Jadi, misalkan $k + 1$ bukan bilangan prima. Dalam hal ini, $k + 1$ mempunyai faktor prima, sebutlah $p,$ sehingga $k + 1 = pq,$ dengan $p, q < k + 1.$ Di sini q mungkin merupakan bilangan komposit, tetapi menurut hipotesis q dapat ditulis sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima.

Jadi, $k + 1$ pun dapat dinyatakan sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima.

4.4 Latiahan Soal Induksi Matematika

Buktikan dengan menggunakan induksi matematika.

1. 2 + 4 + 6 + … + 2n = n(n + 1), untuk setiap n bilangan asli.
2. Gunakanlah induksi matematika untuk membuktikan persamaan, Sn = 1 + 3 + 5 +7 +…+ (2n - 1) = n^2 untuk semua bilangan bulat n ≥ 1.
3. Buktikan 1 + 3 + 5 + … + (2n − 1) = n^2 benar, untuk setiap n bilangan asli
4. Buktikan n^3 + 2n habis dibagi 3, untuk setiap n bilangan asli
5. Buktikan untuk setiap bilangan asli n ≥ 2 berlaku 3n > 1 + 2n

6. Buktikan untuk setiap bilangan asli $n \geq 4$ berlaku $(n + 1)! > 3n$

Penyelesaian :

Soal 1.

$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1)$, untuk setiap n bilangan asli.

Jawab :
$P(n)$: $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1)$
Akan dibuktikan n = (n) benar untuk setiap $n \in N$

Langkah Pertama :
Akan ditunjukkan n = 1 benar
$2 = 1(1 + 1)$
Jadi, P(1) benar

Langkah Kedua :
Asumsikan n=(k) benar yaitu
$2 + 4 + 6 + \ldots + 2k = k(k + 1), \quad k \in N$

Langkah Ketiga

Akan ditunjukkan n = (k + 1) juga benar, yaitu
$2 + 4 + 6 + \ldots + 2k + 2(k + 1) = (k + 1)(k + 1 + 1)$

Dari asumsi :
$2 + 4 + 6 + \ldots + 2k = k(k + 1)$
Tambahkan kedua ruas dengan u_{k+1} :
$2 + 4 + 6 + \ldots + 2k + 2(k + 1) = k(k + 1) + 2(k + 1)$
$2 + 4 + 6 + \ldots + 2k + 2(k + 1) = (k + 1)(k + 2)$
$2 + 4 + 6 + \ldots + 2k + 2(k + 1) = (k + 1)(k + 1 + 1)$
Jadi, n = (k + 1) benar

Soal 2.

Gunakanlah induksi matematika untuk membuktikan persamaan

$S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-1) = n^2$ untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$.

Jawab :Langkah Pertama :
Akan ditunjukkan n = 1 benar
$S_1 = 1 = 1^2$
Langkah Kedua
Asumsikan bahwa n = k benar, yaitu
$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 2(k) - 1 = k^2$
$\underline{1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k-1) = k^2}$
Langkah Ketiga
Buktikan bahwa n = (k+1) adalah benar
$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k-1) + [2(k+1) - 1] = (k+1)^2$
ingat bahwa $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k-1) = k^2$
maka
$k^2 + [2(k+1) - 1] = (k+1)^2$
$k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$
$(k+1)^2 = (k+1)^2$; maka persamaan di atas terbukti

Soal 3.

Buktikan $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ benar, untuk setiap n bilangan asli

Jawab :
Langkah Pertama :
Akan ditunjukkan n = 1 benar
$1 = 1^2$
Jadi, P(1) benar

Langkah Kedua:
Asumsikan n = k benar, yaitu
$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2, \quad k \in N$

Langkah Ketiga :Akan ditunjukkan n=(k + 1) juga benar, yaitu
$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2$

Dari asumsi :
$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$
Tambahkan kedua ruas dengan u_{k+1} :
$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = k^2 + (2(k + 1) - 1)$
$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = k^2 + 2k + 1$
$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2$
Jadi, n = (k + 1) juga benar

Soal 4. (Pembagian)

Buktikan $n^3 + 2n$ habis dibagi 3, untuk setiap n bilangan asli

Jawab :
Langkah Pertama:
Akan ditunjukkan n = 1 benar
$1^3 + 2.1 = 3 = 3.1$
Jadi, n = 1 benar

Langkah Kedua:
Asumsikan n = k benar, yaitu
$k^3 + 2k = 3m, \quad k \in \mathbb{N}$

Langkah Ketiga:

Akan ditunjukkan n = (k + 1) juga benar, yaitu
$(k + 1)^3 + 2(k + 1) = 3p, \quad p \in \mathbb{Z}$

$(k + 1)^3 + 2(k + 1) = (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + (2k + 2)$
$(k + 1)^3 + 2(k + 1) = (k^3 + 2k) + (3k^2 + 3k + 3)$

$(k + 1)^3 + 2(k + 1) = 3m + 3(k^2 + k + 1)$
$(k + 1)^3 + 2(k + 1) = 3(m + k^2 + k + 1)$

Karena m bilangan bulat dan k bilangan asli, maka $(m + k^2 + k + 1)$ adalah bilangan bulat.
Misalkan $p = (m + k^2 + k + 1)$, maka
$(k + 1)^3 + 2(k + 1) = 3p$, dengan $p \in ZZ$
Jadi, $n = (k + 1)$ benar

Soal 5. (Pertidaksamaan)

Buktikan untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$ berlaku $3^n > 1 + 2n$

Jawab :Langkah Pertama:
Akan ditunjukkan $n = 2$ benar
$3^2 = 9 > 1 + 2.2 = 5$
Jadi, P(1) benar

Langkah Kedua:Asumsikan $n = k$ benar, yaitu
$3^k > 1 + 2k, \quad k \geq 2$

Langkah Ketiga: Akan ditunjukkan $n = (k + 1)$ juga benar, yaitu
$2k$ (karena $6k > 2k$)
$3^{k+1} = 1 + 2k + 2$
$3^{k+1} = 1 + 2(k + 1)$

Jadi, $n = (k + 1)$ juga benar

Soal 6.

Buktikan untuk setiap bilangan Asli $n \geq 4$ berlaku $(n + 1)! > 3^n$

Jawab Langkah Pertama:
Akan ditunjukkan n=(4) benar $(4 + 1)! > 3^4$
ruas kiri : $5! = 5.4.3.2.1 = 1203^{k+1} > 1 + 2(k + 1)$

$3^{k+1} = 3(3^k)$
$3^{k+1} > 3(1 + 2k)$ (karena $3^k > 1 + 2k$)
$3^{k+1} = 3 + 6k$
$3^{k+1} > 3 +$

ruas kanan : $3^4 = 81$
Jadi, n = (4) benar

Langkah Kedua Asumsikan n = k benar, yaitu
$(k + 1)! > 3^k$, $k \geq 4$

Langkah Ketiga:Akan ditunjukkan n = (k + 1) juga benar, yaitu
$(k + 1 + 1)! > 3^{k+1}$

$(k + 1 + 1)! = (k + 2)!$
$(k + 1 + 1)! = (k + 2)(k + 1)!$
$(k + 1 + 1)! > (k + 2)(3^k)$ (karena $(k + 1)! > 3^k$)
$(k + 1 + 1)! > 3(3^k)$ (karena $k + 2 > 3$)
$(k + 1 + 1)! = 3^{k+1}$

Jadi, n = (k + 1) juga benar

Bab 5

Pernyataan Matematika dan Strategi Pembuktian

5.1 Pernyataan Matematika

Menurut Prof. Dave Richeson, pernyataan matematika dapat dikelompokkan sebagai berikut:

1. Definisi

   Suatu deskripsi yang tepat dan jelas dari suatu istilah matematika. Ia menggambarkan makna dari suatu istilah dengan memberikan semua sifat yang harus dimilikinya.

2. Teorema

   Suatu pernyataan matematika yang dibuktikan melalui penalaran yang valid. Dalam karya ilmiah matematika, istilah teorema sering diberikan untuk hasil-hasil yang penting.

3. Lemma

Suatu pernyataan matematika yang juga harus dibuktikan melalui penalaran yang valid, tetapi merupakan hasil minor yang tujuan utamanya mendukung pembuktian suatu teorema. Ia merupakan batu loncatan untuk membuktikan teorema.

Contoh: *Lemma Zorn, Lemma Urysohn, Lemma Sperner*, dll.

4. Corollary

   Suatu pernyataan matematika yang pembuktiannnya (biasanya singkat) dan berdasar pada suatu teorema yang diberikan.

5. Proposition

   Suatu pernyataan matematika yang telah dibuktikan dan menarik, tetapi kurang penting jika dibandingkan dengan teorema.

6. Konjektur

   Suatu pernyataan yang belum dibuktikan tetapi dipercaya kebenarannya.

   Contoh: *Konjektur Collatz, Konjektur Goldbach conjecture*, dll.

7. Klaim

   Suatu pernyataan sisipan yang kemudian dibuktikan. Sering digunakan sebagai lemma takresmi.

8. Aksioma/Postulat

Suatu pernyataan yang dianggap/ diasumsikan benar tanpa pembuktian.

Contoh : *Lima Postolat Euclid, Aksioma zermelo-Frankel, Aksioma Peano*, dll.

9. Identitas

   Suatu pernyataan matematika yang memberikan kesamaan antara dua kuantitas.

   Contoh: Identitas Trigonometri, Identitas Euler, dll.

10. Paradoks

    Suatu pernyataan yang dapat ditunjukkan (dengan aksiomadan definisi) bisa benilai benar dan bernilai salah (memiliki kontradiksi). Paradok serring digunakan untuk memperlihatkan ketidak konsistenan suatu teori yang mengagumkan (Paradoks Zeno, Paradoks Russell) atau secara takresmi untuk menggambarkan suatu hal mengejutkan yang diturunkan dari beberapa aturan/hukum (Paradoks Banach-Tarski, ParadoksAlabama).

5.2 Strategi Pembuktian

Pada bagian ini akan didiskusikan beberapa strategi atau format pembuktian matematika, tetapi perlu ditegaskan bahwa tidak ada cara yang pasti (dijamin!) untuk sampai pada suatu bukti dan juga tidak ada bukti yang terbaik. Mungkin perlu kita ingat filosofi tentangpembuktian yang dikemukakan oleh Yu I. Manin dalam bukunya *A Course in Mathematical Logic*:

Metode pembuktian diperlukan untuk meyakinkan kebenaran pernyataan atau teorema yang pada umumnya berbentuk implikasi atau biimpilikasi. Pembuktian pernyataan implikasi menurut Martono (1999) antara lain terdiri atas metode bukti langsung, metode bukti tak langsung (bukti dengan kontraposisi dan kontradiksi).

5.2.1 Pembuktian Menyangkut Implikasi

Ada tiga strategi dalam pembuktian pernyataan berbentuk implikasi $P \Rightarrow Q$, yaitu: langsung, kontraposisi, dan taklangsung.

- **Strategi Langsung**

  Asumsikan P benar dan kemudian buktikan Q Jadi, $P \Rightarrow Q$.

  Contoh 5.1.

  Misalkan a dan b bilangan real. Buktikan bahwa jika $0 < a < b$, maka $a^2 < b^2$.

  Kita diberikan hipotesis bahwa a dan b bilangan real. Konklusi kita berbentuk $P \Rightarrow Q$ dimana P adalah pernyataan $0 < a < b$ dan Q adalah pernyataan $a^2 < b^2$

  Kalau ditabelkan dalam bentuk diberikan dan tujuan sebagai berikut:

Diberikan	Tujuan
a dan b bilangan real	$(0 < a < b) \Rightarrow (a^2 < b^2)$

Berdasarkan strategi pembuktian, kita seharusnya mengasumsikan $0 < a < b$ benar dan menggunakannya untuk membuktikan $a^2 < b^2$ sehingga tabel diberikan dan tujuan menjadi

Diberikan	Tujuan
a dan b bilangan real $0 < a < b$	$a^2 < b^2$

Bentuk Pembuktian Akhir a dan b bilangan real. Misalkan $0 < a < b$.

Karena $a > 0$, jika dikalikan dengan a maka pertidaksamaan $0 < a < b$

memenuhi $0 < a.b < b^2$

Begitu juga karena $b > 0$, jika dikalikan dengan b maka pertidaksamaan $0 < a < b$ memenuhi $0 < a^2 < a.b$.

Dengan menyusun sesuai urutan, kita peroleh $0 < a^2 < a.b < b^2$

Jadi, jika $0 < a < b$, maka $a^2 < b^2$.

- **Strategi Kontraposisi**

  Asumsikan Q salah dan kemudian buktikan bahwa P juga salah

  Analisis pendahuluan (pada kertas buram)

  Sebelum menggunakan strategi:

Diberikan	**Tujuan**
P dan Q	$P \Rightarrow Q$

  Setelah menggunakan strategi

Diberikan	Tujuan
$\neg Q$	$-P$

  Bentuk Pembuktian Akhir

  Misalkan Q salah.

  Jadi, $P \Rightarrow Q$.

Contoh 5.2.

Misalkan a, b, dan c bilangan real dan a > b.

Buktikan bahwa jika ac ≤ bc, maka c ≤0.

Kita diberikan hipotesis bahwa a, b, dan c bilangan real dan a > b. Konklusi kita berbentuk P ⇒ Q dimana P adalah pernyataan (a.c ≤ b.c) dan Q adalah pernyataan ($c \leq 0$). Kalau ditabelkan dalam bentuk diberikan dan tujuan, masalah di atas adalah sebagai berikut:

Diberikan	Tujuan
a, b, dan c bilangan real $a > b$	$(a.c \leq b.c) \Rightarrow (c \leq 0)$

Berdasarkan strategi pembuktian, kontraposisi dari tujuan kita berbentuk $\neg Q \Rightarrow \neg P$ dimana $\neg Q$ adalah pernyataan yang ekivalen dengan $\neg(c \leq 0)$ yaitu $c >$

0 dan $\neg P$ adalah pernyataan yang ekivalen dengan $\neg(ac \leq bc)$ yaitu $ac > bc$. sehingga tabel diberikan dan tujuan menjadi

Diberikan	Tujuan
a, b, dan c bilangan real $a > b$ $c > 0$	$a.c > b.c$

Bentuk Pembuktian Akhir

Misalkan a, b, dan c bilangan real dan $a > b$. Misalkan $c > 0$.

Karena $a > b$, jika dikalikan dengan c positif,

maka pertidaksamaan $a > b$ memenuhi $ac > bc$.

Jadi, jika $ac \leq bc$, maka $c \leq 0$.

- **Strategi Tidak Langsung**

  Asumsikan P dan $\neg Q$ dan kemudian temukan kontradiksi

  Sebelum menggunakan strategi:

Diberikan	Tujuan
P dan Q	$P \Rightarrow Q$

  Setelah menggunakan strategi:

Diberikan	Tujuan
-p dan -Q	Kontradiksi

  Bentuk Pembuktian Akhir

  Misalkan P . Asumsikan ¬Q.

  Jadi, P ⇒ Q.

Contoh 5.3.

Misalkan a, b, dan c bilangan real dan a > b.

Buktikan bahwa jika a.c ≤ b.c, maka c ≤ 0.

Kita diberikan hipotesis bahwa a, b, dan c bilangan real dan a > b. Konklusi kita berbentuk P ⇒ Q dimana P adalah pernyataan (ac ≤ bc) dan Q adalah pernyataan (c

$\leq$ 0). Kalau ditabelkan dalam bentuk diberikan dan tujuan, masalah di atas adalah sebagai berikut:

Diberikan	**Tujuan**
a, b, dan c bilangan real a > b	$(ac \leq bc) \Rightarrow (c \leq 0)$

Berdasarkan strategi pembuktian, kita asumsikan anteseden $(ac \leq bc)$ dan negasi dari konsekuen yaitu $(c > 0)$ benar. Tujuan kita selanjutnya adalah menemukan kontradiksi sehingga tabel diberikan dan tujuan menjadi

Diberikan	**Tujuan**
a, b, dan c bilangan real dan a > b ac $\leq$ bc . ; c >0	kontradiksi

Bentuk Pembuktian Akhir

Misalkan a, b, dan c bilangan real dan a > b.

Misalkan ac $\leq$ bc. Asumsikan c > 0.

Karena a > b, jika dikalikan dengan c positif,

maka pertidaksamaan a > b memenuhi ac > bc.

Kontradiksi dengan ac $\leq$ bc.

Jadi, jika a.c $\leq$ b.c, maka c $\leq$ 0.

5.2.2 Pembuktian Menyangkut Negasi

Untuk membuktikan tujuan berbentuk -*P*

Strategi: Asumsikan *P* benar dan kemudian cari kontradiksi.

Sebelum menggunakan strategi:

Diberikan	Tujuan
--	-P

Sesudah menggunakan strategi

Diberikan	Tujuan
-- P	Kontradiksi

Bentuk PembuktianAkhir

Andaikan P benar.

Jadi, P salah.

Contoh 5.4.

Buktikan jika $a^2 + b = 13$ dan $b \neq 4$, maka $a \neq 3$.

Kalau ditabelkan dalam bentuk diberikan dan tujuan sebagai berikut:

Diberikan	**Tujuan**
$a^2 + b = 13$	

$b \neq 4$	$a \neq 3$

Berdasarkan strategi pembuktian, kita seharusnya mengasumsikan a = 3 benar dan mencari kontradiksi sehingga tabel diberikan dan tujuan menjadi

Diberikan	**Tujuan**
$a^2 + b = 13$ $b \neq 4$, $a = 3$	kontradiksi

Bentuk Pembuktian Akhir

Misalkan $a^2 + b = 13$ dan $b \neq 4$ bilangan real. Andaikan $a = 3$.

Maka, $a^2 + b = 9 + b \neq 9 + 4 = 13$.

Jadi, $a^2 + b = 13$.

Kontradiksi dengan $a^2 + b = 13$.

Karena itu, $a \neq 3$.

Jadi, jika $a^2 + b = 13$ dan $b \neq 4$, maka $a \neq 3$.

5.2.3 Pembuktian Menyangkut Kuantor.

Kuantor merupakan suatu istilah yang digunakan untuk menyatakan "berapa banyak" dari suatu objek dalam suatu sistem.

Kuantor dapat dibagi menjadi dua, yaitu :

1) Kuantor Universal ($\forall$).

Kuantor universal juga bisa disebut kuantor umum. Kuantor universal merupakan kuantor yang pernyataan keseluruhannya benar. Di dalam pernyataan ini biasanya mengandung kata kata seperti "untuk semua, untuk setiap, untuk tiap-tiap". Simbol operator logika untuk kuantor universal seperti huruf A yang dicerminkan secara horizontal, yaitu ∀. Notasi ∀x dibaca untuk semua x atau untuk setiap x. Pernyataan berkuantor universal dengan kalimat terbuka p(x) disimbolkan dalam ∀x, p(x).

Contoh :

a. Sebuah pernyataan terbuka p(x) adalah "pegawai memiliki kemampuan membaca yang baik". Pernyataan berkuantor universal menjadi semua pegawai memiliki kemampuan membaca yang baik. Adanya kata semua pada sebuah pernyataan menjadi karakteristik dari pernyataan kuantor universal.
b. Pembuktian ∀x bilangan asli, x + 1 > x.
   Caranya dengan memasukkan bilangan asli ke x, seperti :
   x = 1 $\rightarrow$ Menjadi (1) + 1 > (1)
   2 > 1 (Benar).
   x = 2 $\rightarrow$ Menjadi (2) + 1 > (2)
   3 > 2 (Benar).
   x = 3 $\rightarrow$ Menjadi (3) + 1 > (3)
   4 > 3 (Benar).
   Jadi, bisa dinyatakan bahwa ∀x bilangan asli, x + 1 > x adalah pernyataan yang valid. Karena saat semua x

diubah menjadi bilangan asli pernyataan tersebut semuanya benar.

Latihan soal :

1. Tentukan nilai kebenaran kuantor universal dari pernyataan berikut :
   a. Semua makhluk tidak kekal.
   b. Setiap orang pintar menari.
   c. Setiap hari makan ikan.
2. Tentukan nilai kebenaran berikut ini :
   a. Buktikan bahwa ∀x bilangan asli, $x^2 + 1 > x^2$
   b. Buktikan bahwa ∀x bilangan prima < 8, $x^2 - x > 1$
   c. Buktikan bahwa ∀x bilangan bulat, $x^2 < 0$

2) Kuantor Eksistensial (∃).

Kuantor eksistensial disebut juga kuantor khusus atau kebalikan dari bentuk kuantor universal. Kuantor Eksistensial merupakan kuantor yang satu atau beberapa pernyataanya saja yang benar. Kuantor ini memiliki karakteristik adanya kata "ada, beberapa, terdapat", atau kata-kata yang semakna lainnya. Simbol operator logika untuk kuantor universal seperti huruf E yang dicerminkan secara vertikal, yaitu ∃. Notasi ∃x dibaca ada nilai x, beberapa nilai x, atau terdapat nilai x. Pernyataan berkuantor eksistensial dengan kalimat terbuka p(x) disimbolkan dalam ∃x, p(x).

Contoh :

a. Sebuah pernyataan terbuka p(x) adalah pegawai memiliki kemampuan membaca yang baik.

Pernyataan berkuantor eksistensial menjadi beberapa pegawai memiliki kemampuan membaca yang baik. Kata beberapa pada sebuah pernyataan menjadi karakteristik dari pernyataan dengan kuantor eksistensial.

b. Pembuktian $\exists x$ bilangan asli, $x^2 = x$

Caranya dengan memasukkan bilangan asli ke x, seperti :

$x = 1 \rightarrow$ Menjadi $(1)^2 = (1)$

$1 = 1$ (Benar).

$x = 2 \rightarrow$ Menjadi $(2)^2 = (2)$

$4 = 2$ (Salah).

$x = 3 \rightarrow$ Menjadi $(3)^2 = (3)$

$9 = 3$ (Salah).

$x = 4 \rightarrow$ Menjadi $(4)^2 = (4)$

$16 = 4$ (Salah).

Jadi, bisa dinyatakan bahwa $\exists x$ bilangan asli, $x^2 = x$ adalah pernyataan yang valid. Karena hanya terdapat 1 pernyataan yang benar dari kuantor tersebut.

Latihan soal :

Tentukan nilai kebenaran kuantor eksistensial pernyataan berikut :

1. Beberapa Presiden di Dunia adalah wanita.
2. Semua manusia tidak sempurna.
3. Ada orang Indonesia yang suka lagu pop.

Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan berikut :

1. Buktikan bahwa $\exists x$ bilangan asli, $x < 7$

2. Buktikan bahwa $\exists x$ bilangan asli < 4, $x \geq 0$

3. Buktikan bahwa $\exists x$ bilangan asli < 5, $x^2 + x > 3$

5.2.4 Pembuktian Menyangkut Biimplikasi ($\Leftrightarrow$).

Biimplikasi adalah pernyataan majemuk yang berupa rangkaian dari 2 pernyataan tunggal yang dihubungkan dengan kata penghubung " ...jika dan hanya jika... ".

Biimplikasi dapat diartikan sebagai implikasi dua arah $P \Rightarrow Q$ dan $P \Rightarrow Q$ atau merupakan konjungsi " $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$", sehingga nilai kebenaran dari $P \Leftrightarrow Q$ dapat ditentukan berdasarkan nilai kebenaran $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$".

Untuk membantu pengerjaan soal, Biimplikasi memiliki tabel acuan , yaitu :

Tabel kebenaran Biimplikasi.

P	**Q**	**P ⇔ Q**
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Catatan : B = Benar.

S = Salah.

Jadi, berdasarkan tabel diatas Biimplikasi dikatakan benar jika P dan Q memiliki nilai yang sama-sama benar, namun jika ada salah satu nilai yang salah dari P dan Q maka pernyataan tersebut salah.

Contoh :

Buktikan bahwa $46 + 54 = 100$ jika dan hanya jika $7^2 + 21^0 = 50$.

Analisis pendahuluan

P $\rightarrow$ $46 + 54 = 100$.

Didapatkan bahwa pernyataan P benar karena hasil dari penjumlahan 46 + 54 adalah 100. Jadi pernyataan P benar (B).

Q $\rightarrow$ $7^2 + 21^0 = 50$.

Didapatkan bahwa pernyataan Q benar karena hasil dari penjumlahan $7^2 + 21^0$ adalah 50. Jadi pernyataan Q juga benar (B).

Maka dapat dibuktikan bahwa pernyataan P dan Q valid.

Latihan soal :

1. Lengkapilah tabel kebenaran berikut ini

P	Q	$Q \Leftrightarrow P$	$\sim P$	$P \Leftrightarrow \sim P$	$\sim P \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow P)$

P	Q	Q ⇔ P	~ P	P ⇔ ~ P	~ P ⇔ (Q ⇔ P)

2. Buatlah bentuk Biimplikasi dari pernyataan berikut:

   P → Ibu membelikan sepeda.

   Q → Gandi juara olimpiade matematika.

3. Buktikan bahwa $\frac{23}{7} > 3$ jika dan hanya jika 0,9 + $2\frac{1}{4}$ = 3,15

4. Buktikan bahwa $\sqrt{441}$ = 21 jika dan hanya jika 67% + 0,53 = 1,2

5.2.5 Pembuktian menyangkut Disjungsi (V).

Disjungsi dilambangkan atau dinotasikan dengan (V). Disjungsi merupakan pernyataan majemuk yang dibentuk dengan cara menggabungkan dua pernyataan tunggal dengan menggunakan kata penghubung “atau”.

Untuk membantu pengerjaan soal, Disjungsi memiliki tabel acuan , yaitu :

Tabel Kebenaran Disjungsi

P	**Q**	**P V Q**
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Catatan : B = Benar.

S = Salah.

Jadi, berdasarkan tabel diatas Disjungsi bernilai benar jika kedua pernyataan bernilai benar namun juga benar saat salah satu pernyataan saja bernilai benar dan bernilai salah jika kedua pernyataan bernilai salah.

Contoh : Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan berikut :

2 + 7 = 8 atau 2 adalah bilangan prima.

P $\rightarrow$ 2 + 7 = 8.

Didapatkan bahwa pernyataan P ternyata kurang tepat karena hasil dari 2 + 7 = 9.

Jadi, pernyataan P salah (S).

Q $\rightarrow$ 2 adalah bilangan prima.

Didapatkan bahwa pernyataan Q benar karena 2 merupakan bilangan prima.

Jadi, pernyataan Q benar (B).

Maka nilai kebenaran dari pernyataan P dan Q adalah benar karena ada satu pernyataan yang benar dari P dan Q.

Latihan soal :

1. Lengkapilah tabel kebenaran berikut

P	Q	$\sim$ P	P V $\sim$ P	Q V $\sim$ P	Q V (P V $\sim$ P)

2. Tentukan kebenaran dari pernyataan berikut :
   a. Segitiga memiliki empat sisi atau trapesium memiliki 3 sisi.
   b. 21 adalah bilangan genap atau bilangan prima.
   c. Gunung fuji adalah gunung tertinggi didunia atau sungai amazon adalah sungai terpanjang di dunia.
3. Tentukan nilai x sehingga disjungsi benar.

   $x^2 = 9$ atau $\frac{2}{3} < \frac{1}{4}$

4. Buktikan bahwa tan 45° = $\sqrt{3}$ atau sin 360° = 1.

5.2.6 Pembuktian Menggunakan Induksi.

Induksi matematika menjadi sebuah metode pembuktian secara deduktif yang digunakan untuk membuktikan suatu pernyataan benar atau salah. Dimana merupakan suatu proses atau aktivitas berpikir untuk menarik kesimpulan berdasarkan pada kebenaran pernyataan yang berlaku secara umum sehingga pada pernyataan khusus atau tertentu juga bisa berlaku benar. Dalam induksi matematika ini, variabel dari suatu perumusan dibuktikan sebagai anggota dari himpunan bilangan asli. Pada prosesnya, kesimpulan ditarik berdasarkan kebenaran pernyataan yang berlaku secara umum sehingga untuk pernyataan khusus juga dapat berlaku benar juga. Selain itu, suatu variabel dalam induksi matematika juga dianggap sebagai sebuah anggota dari himpunan bilangan asli.

Pada dasarnya, terdapat tiga langkah dalam induksi matematika agar dapat membuktikan apakah suatu rumus atau pernyataan dapat bernilai benar atau justru sebaliknya.

Strategi pembuktian suatu pernyataan dengan induksi :

1. Membuktikan suatu pernyataan atau rumus benar untuk ($n = 1$).
2. Mengasumsikan suatu pernyataan atau rumus benar untuk ($n = k$).
3. Membuktikan suatu pernyataan atau rumus benar untuk ($n = k + 1$).

Contoh :

Buktikan $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$, untuk setiap n bilangan asli.

Langkah pertama :

Akan ditunjukkan $n = 1$ benar.

$2n - 1 = n^2$

$2.(1) - 1 = (1)^2$

$$2 - 1 = 1$$
$$1 = 1$$

Langkah kedua :

Asumsikan (n = k) benar, yaitu :

$1 + 3 + 5 + ... + 2(k) - 1 = k^2$

$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2$

Langkah ketiga :

Buktikan bahwa (n = k + 1) adalah benar.

$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + 2(k + 1) - 1 = (k + 1)^2$

Ingat bahwa :

$1 + 3 + 5 + ...+ (2k - 1) = k^2$

Maka akan menjadi

$k^2 + 2(k + 1) - 1 = (k + 1)^2$

$k^2 + 2k + 2 - 1 = (k + 1)^2$

$k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$

$(k + 1)^2 = (k + 1)^2$

Maka persamaan di atas tebukti.

Latihan soal :

1. Buktikan bahwa $2 + 4 + 6 + ... + 2n = n^2 + n$.
2. Buktikan bahwa $2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n+1)$.
3. Buktikan bahwa $5 + 7 + 9 + ... + (2n + 3) = n^2 + 4n$.

Bab 6

Himpunan

6.1 Pengertian Himpunan

Hasil studi mendalam para ahli matematika mutakhir menyimpulkan bahwa semua cabang-cabang matematika bertumpu pada konsep dasar dan teori tentang himpunan. Teori himpunan bukan saja digunakan dalam penjelasan bilangan-bilangan, namun juga sangat penting untuk menyelesaikan persamaan, interpretasi grafik, teori kemungkinan dan statistika. Selain itu, konsep himpunan juga menunjang penjelasan konsep-konsep geometri, baik geometri bidang, maupun geometri ruang. Konsep tentang himpunan pertama kali dikemukakan oleh seorang ahli matematika berkebangsaan Jerman, yaitu George Cantor (1918), akhir abad ke-19. Konsep himpunan pada saat itu masih menjadi bahan perdebatan. Dan baru pada tahun 1920, konsep ini mulai digunakan sebagai landasan matematika. George Cantor (1845-1918) menyatakan bahwa himpunan adalah hasil pengumpulan objek-objek tertentu yang telah ditentukan menurut persepsi kita atau menurut pemikiran kita menjadi suatu kesatuan. Objek-objek itu disebut elemen/anggota dari himpunan.

Apakah sesungguhnya himpunan itu? Secara umum himpunan dapat diartikan sebagai kumpulan objek yang didefinisikan dengan jelas dan dapat dibeda-bedakan. Jadi himpunan adalah sebuah koleksi dari objek-objek yang terdefinisi dengan baik (*well defined*). Terdefinisi dengan baik artinya bahwa untuk sebarang objek x yang diberikan maka kita selalu dapat menentukan apakah objek X itu termasuk dalam sebuah himpunan tertentu atau tidak. Mengapa perlu jelas pendefinisiannya? Maksudnya adalah agar orang dapat menentukan apakah suatu benda merupakan anggota himpunan yang dimaksudkan atau bukan. Selanjutnya objek-objek yang termasuk ke dalam sebuah himpunan disebut sebagai elemen atau unsur atau anggota dari himpunan itu. Melengkapi pengertian di atas Julius Hambali dan Siskandar memberikan batasan bahwa himpunan adalah suatu koleksi benda yang nyata atau pun tidak nyata. Seperti sekawanan kuda, sekelompok ayam, dan sekumpulan huruf-huruf, masing-masing kata kawanan, kelompok, dan kumpulan dapat diganti dengan kata himpunan. Istilah lain dari himpunan adalah kelas, set, kelompok, keluarga atau gugus. Untuk memperjelas pemahaman Anda, di bawah ini akan disajikan gambaran himpunan yang lebih kongkrit serta ilustrasinya.

Contoh :

1) Kumpulan binatang berkaki empat.

Kumpulan binatang berkaki empat adalah himpunan, karena jika ada sekumpulan hewan (misalnya, anjing, kucing, monyet, sapi, laba-laba, ayam) maka kita dengan mudah menyebutkan hewan-hewan yang memiliki kaki 4 yaitu anjing, kucing, sapi yang merupakan anggota himpunan binatang berkaki empat. Sedangkan sisanya (monyet, laba-laba, ayam) bukan anggota himpunan binatang berkaki empat. Ketidakraguan kita untuk menetapkan suatu binatang sebagai anggota himpunan binatang berkaki empat atau bukan menunjukkan himpunan binatang berkaki empat terdefinisi dengan jelas.

2) Kumpulan bilangan bulat positif

Kumpulan bilangan bulat positif adalah contoh himpunan, karena jelas anggota himpunan itu hanya bilangan yang bernilai positif. Misalnya 1, 2, 3, 4, 5, dst. Sedangkan bilangan yang bernilai negatif bukan merupakan anggota himpunan. Sehingga kita dapat dengan jelas menunjukkan anggota himpunan bilangan bulat positif.

6.2 Notasi Himpunan

Istilah himpunan dinotasikan dengan tanda kurung kurawal { } dan biasanya himpunan diberi nama dengan memakai huruf-huruf kapital (besar) seperti: A, B, C, D, X atau semacamnya. Sedangkan huruf-huruf kecil biasanya dipakai untuk menyatakan anggota suatu himpunan. Setiap objek yang terdapat dalam suatu himpunan disebut anggota atau elemen atau unsur himpunan itu. Keanggotaan suatu himpunan dinyatakan dengan lambang ∈ yang dibaca "anggota dari", sedangkan untuk menyatakan anggota yang tidak termuat dalam himpunan digunakan lambang ∉ dan dibaca "bukan anggota dari". Pernyataan bahwa a sebuah anggota dari himpunan A dapat ditulis $a \in A$, sedangkan pernyataan bahwa m bukan anggota dari himpunan A ditulis $m \notin A$.

Contoh

Jika anak ditanya tentang himpunan A yang didefinisikan sebagai himpunan warna pada pelangi maka jawaban anak benar jika jawabannya adalah Merah, Jingga, Kuning, Hijau, Biru, Nila dan Ungu. Notasi dari himpunan tersebut adalah A = {merah, jingga, kuning, hijau, biru, nila, ungu}. Keanggotaan dari himpunan A dapat dituliskan sebagai berikut: merah ∈ A , hijau ∈ A , kuning ∈ A , ungu ∈ A

Sedangkan jika ada anak yang menjawab warna hitam maka dinyatakan hitam ∉ A artinya hitam bukan anggota A, karena warna pelangi tidak ada yang berwarna hitam. Jumlah anggota himpunan A atau banyaknya anggota himpunan A ditulis n (A) = 7 (Karena warna pada pelangi ada 7 warna).

6.3 Cara Menyatakan Himpunan

Ada beberapa cara menyatakan himpunan, di antaranya dengan tabulasi atau mendaftar (The Roster Method), dengan Notasi pembentuk himpunan (*The Rule Method*), dan dengan menyebutkan syarat keanggotaannya. Cara-cara menyatakan himpunan tersebut dapat dijelaskan sebagai berikut.

a. Tabulasi (*The Roster Method*)
   Metode ini mengharuskan kita untuk menyebutkan/mendaftarkan anggota-anggota himpunan satu demi satu, dan dalam penulisan tiap-tiap anggota dipisahkan oleh tanda koma (,).
   Contoh :
   - Himpunan A adalah himpunan bilangan asli yang kurang dari 7 maka ditulis:
     A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. 2)
   - Himpunan B adalah himpunan huruf-huruf vokal maka ditulis:
     B = { a, i, u, e, o }.
   - Himpunan C adalah himpunan lima buah alat transportasi darat maka ditulis:
     C = {delman, becak, motor, mobil, kereta api}

b. Dengan notasi pembentukan himpunan (*The rule method*)
   Anggota himpunan dinyatakan dengan notasi pembentuk himpunan (*set builder*). Dalam cara ini anggota himpunan yang akan ditulis dinyatakan dengan variabel (pengganti, peubah), yang diikuti dengan tanda garis kemudian dilanjutkan dengan menyebutkan sifat-sifat atau ciri-ciri unsur himpunan.
   Contoh :
   1. A = {x │ x alat musik tiup}

Maka dibaca himpunan A adalah himpunan x sedemikian hingga x adalah alat musik tiup.

2. B = {y | warna lampu lalu lintas}
   Maka dibaca himpunan B adalah himpunan y di mana y adalah warna lampu lalu lintas.
3. C = {x | x adalah bilangan bulat genap dan $0 < x < 10$}
   Maka dibaca himpunan C adalah himpunan x sedemikian hingga x adalah bilangan bulat genap yang berada di antara 0 dan 10.
4. D = {x | x adalah lima huruf pertama abjad latin}
   Maka dibaca himpunan D adalah himpunan x sedemikian hingga x adalah huruf pertama abjad latin.

c. Dengan menyebutkan syarat keanggotaannya

Dalam menyatakan himpunan dapat disajikan dengan cara deskripsi, yaitu menyatakan himpunan dengan kata-kata; yaitu dengan menyebutkan syarat keanggotaannya.

Contoh :

1. Himpunan A adalah himpunan warna-warna yang ada dalam lagu 'Balonku Ada Lima'
2. Himpunan B adalah himpunan empat huruf pertama dalam urutan abjad latin.
3. Himpunan C adalah himpunan-himpunan warna lalu-lintas.
4. Himpunan D adalah himpunan siswa TK Salman Al-Farisi Kelompok A.

6.4 Beberapa Aksioma Himpunan Zermelo-Frankel

Pada bagian ini akan dibicarakan beberapa aksioma himpunan Zermelo-Frankel dan akibat-akibat dari aksioma tersebut.

1) Aksioma Kesamaan
   Misalkan A, B adalah himpunan. Kita katakana A = B jika dan hanya jika keduanya memiliki anggota yang sama
   Contoh :
   Misalkan $A = \{x|\text{x ganjil}, 2 < x < 8\}$ dan $= \{x|\text{x prima}, 2 < x < 10\}$.
   Maka, A = B
   Akibat yang akan ditimbulkan dari aksioma ini adalah
   - $\{a,a\} = \{a\}$
   - $\{a,b\} = \{b,a\}$

   Teorema ini menunjukan bahwa pengulangan anggota dalam himpunan diabaikan. Hal ini juga bisa digunakan untuk menjamin bahwa setiap himpunan adalah tunggal. Selanjutnya, kita definisikan istilah himpunan bagian untuk menunjukkan salah satu hubungan antara dua himpunan.

   Misalkan A dan B himpunan. Jika untuk setiap $x \in A$, berlaku $x \in B$ (dengan kata lain, $x \in A$ => $x \in B$), maka kita katakana A adalah himpunan bagian dari B yang dilambangkan dengan $A \subseteq \mathrm{B}$. Jika $A \subseteq \mathrm{B}$, tetapi $A \neq B$, maka kita katakana A adalah himpunan bagian sejati dari B yang dilambangkan dengan $A \subset B$

Dengan definisi ini, maka kita dapat membuat rumusan baru untuk aksioma kesamaan yaitu

$$\mathbf{A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ dan } B \subseteq A}$$

2) Himpunan Kosong
Terdapat sebuah himpunan yang tidak memiliki anggota yang dilambangkan dengan $\emptyset$ atau {}. Ketunggalan dari himpunan ini juga dijamin oleh aksioma kesamaan. Himpunan kosong ini memiliki status yang khusus seperti dijelaskan berikut ini
Misalkan A adalah suatu himpunan. Maka berlaku $\emptyset \subseteq \mathrm{A}$

Kita akan buktikan dengan menggunakan kontradiksi. Andaikan $\emptyset \subseteq \mathrm{A}$. Ini berarti terdapat $x \in \emptyset$ dimana $x \notin \mathrm{A}$. Kontradiksi dengan $\emptyset$ tidak memiliki anggota.

3) Himpunan Kuasa
Untuk setiap himpunan A, terdapat himpunan yang berupa koleksi semua himpunan bagian dari A dan dilambangkan dengan P(A).
Contoh :

- Untuk himpunan $A = \{a, b, c, d\}$
  P(A) = { {a}, {b}, {c}, {d}, {a, b}, {a, c}, {a, d}, {b, c}, {b, d}, {c, d}, {a, b, c}, {a, b, d}, {a, c, d}, {b, c, d}, {a, b, c, d}, { } }

Perhatikan bahwa untuk setiap himpunan A berlaku $n(P(A)) = 2^{n(A)}$.

Salah satu hal yang masih diperdebatkan adalah keberadaan semsta (universal set). Bertrand Russel dengan argumennya pada tahun 1901 memperlihatkan bahwa tidak ada himpunan yang seperti itu

Misalkan ada himpunan dari semua himpunan yang dilambangkan dengan S

Definisikan $A=\{x \in S \,/\, x \notin x\}$

Artinya, anggota dari A adalah yang bukan anggota dari dirinya sendiri. Banyak himpunan yang bisa kita bayangkan sebagai anggota himpunan ini. Contohnya, himpunan semua manusia yang bukan orang. Himpunan **R** juga menjadi anggota A karena $\boldsymbol{R} \in S$ dan R bukan anggota R. Paradoksnya adalah :

- Jika himpunan $A \in A$, karena $A \in S$, maka berlaku $A \notin A$
- Jika $A \notin A$, maka $A \in A$

6.5 Operasi Pada Himpunan

Ada tiga operasi yang bisa dilakukan pada himpunan, yaitu: gabungan, irisan, dan selisih. Berikut definisi dari masing-masing operasi

1. Gabungan

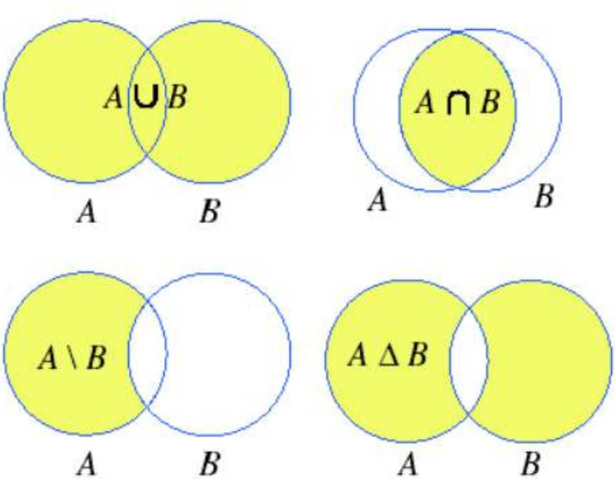
   Misalkan A dan B himpunan. Maka:

Gabungan dari A dan B yang dilambangkan dengan $A \cup B$ didefinisikan sebagai himpunan $\{x|x \in A$ atau $x \in B\}$.
Secara matematis, hal ini dapat kita nyatakan sebagai :
$x \in (A \cup B) \Leftrightarrow x \in A$ atau $x \in B$

2. Irisan

   Irisan dari A dan B yang dilambangkan dengan $A \cap B$ didefinisikan sebagai himpunan $\{x|x \in A$ dan $x \in B\}$.
   Secara matematis, hal ini dapat kita nyatakan sebagai :
   $x \in (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A$ dan $x \in B$
3. Selisih

   Selisih dari A dan B yang dilambangkan dengan $A \backslash B$ didefinisikan sebagai himpunan $\{x|x \in A$ dan $x / \in B\}$.
   Secara matematis, hal ini dapat kita nyatakan sebagai
   $x \in A \backslash B \Leftrightarrow x \in A$ dan $x / \in B$
   Berikut ini diagram Venn untuk operasi himpunan :



Berkaitan dengan definisi di atas, maka bisa ditetapkan beberapa sifat untuk masing-masing operasi seperti dalam teorema berikut.

1. Sifat Operasi Gabungan

   Misalkan A, B, dan C himpunan. Maka berlaku

   - $A \cup \emptyset = A$
   - $A \cup B = B \cup A$
   - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   - $A \cup A = A$
   - $A \subseteq B \Leftrightarrow (A \cup B) = B$

2. Sifat Operasi Irisan

   Misalkan A, B, dan C himpunan. Maka berlaku

   - $A \cap \emptyset = \emptyset$
   - $A \cap B = B \cap A$
   - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

- $A \cap A = A$
- $A \subseteq B \Leftrightarrow (A \cap B) = A$

3. Sifat Distributif

   Misalkan A, B, dan C himpunan. Maka berlaku

   - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4. De Morgan

   Misalkan A, B, dan C himpunan. Maka berlaku

   - $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$
   - $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$

5. Kardinalitas Gabungan Himpunan

   Misalkan A, B dan C himpunan. Maka berlaku :

   - $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
   - $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

Latihan

A. Teori/Pembuktian

1. Misalkan $n(A) = p$ dan $n(B) = q$. Tentukan kardinalitas dari:
   a) $A \cup B$
   b) $A \cap B$
   c) $A \backslash B$
   d) $A \times B$
2. Tunjukkan bahwa $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$.
3. Tunjukkan bahwa $A \backslash B \subseteq A$.
4. Buktikan $(A \backslash B) \cap B = \emptyset$.
5. Buktikan $A = (A \backslash B) \cup (A \cap B)$.

6. Tunjukkan jika $A \subseteq C$ dan $B \subseteq D$, maka $A \cup B \subseteq C \cup D$ dan $A \cap B \subseteq C \cap D$
7. Buktikan $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.
8. Buktikan $A \cap B = A \backslash (A \backslash B)$.
9. Buktikan $A \cup (B \backslash A) = A \cup B$.
10. Buktikan $A \backslash (A \cap B) = A \backslash B$
11. Buktikan $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$
12. Tentukan himpunan kuasa $P(B)$ dari himpunan $B = \{1, \{2, 3\}\}$.
13. Buktikan $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$ dan $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$ dan tidak berlaku $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$

B. Aplikasi/Soal Cerita

1. Ada dua jenis es krim, coklat dan vanilla. Anda dan 24 orang teman (seluruhnya 25 orang) akan membeli es krim. Jika 15 orang membeli es krim vanilla, dan 20 orang membeli es krim coklat, berapa orang yang membeli keduanya?
2. Sekelompok wisatawan yang terdiri dari 52 orang pergi ke toko suvenir. Setiap orang membeli paling tidak satu suvenir. Toko itu menjual dua jenis suvenir, berbahan kayu dan berbahan logam. Jika 45 orang membeli kedua suvenir, dan 47 orang membeli setidaknya satu suvenir kayu, berapa orang yang hanya membeli suvenir logam?
3. Seratus alien menaiki sebuah pesawat luar angkasa dengan tujuan menginvasi planet bumi. Mereka dibedakan berdasarkan dua karakteristik, mata dan ekor. Beberapa alien

memiliki mata tapi tak berekor, beberapa memiliki ekor tapi tanpa mata, dan lainnya memiliki mata dan ekor. Jika 70 alien memiliki mata, dan 50 alien memiliki mata dan ekor, berapa alien yang memiliki mata tanpa ekor? Berapa alien yang memiliki ekor tanpa mata?

4. Tiga puluh sembilan orang anak pergi ke kebun binatang. Ada dua pertunjukan utama yang terbuka untuk dikunjungi, yaitu kolam pesut dan habitat orangutan. Delapan anak mengunjungi kolam pesut, enam orang diantaranya juga mengunjungi habitat orangutan. Berapa banyak anak yang hanya mengunjungi habitat orangutan? Berapa anak yang hanya mengunjungi kolam pesut?
5. Ada 80 orang anak di desa Parakan. Semuanya ikut memeriahkan acara 17 Agustusan. Ada dua aktivitas pada 17 Agustusan, yaitu balap karung dan panjat pinang. Jika 30 orang anak mengikuti kedua aktivitas, dan 24 orang anak hanya ikut balap karung, berapa banyak peserta panjat pinang? Berapa orang anak yang hanya ikut panjat pinang?
6. Ada dua film yang sedang diputar di bioskop lokal, Hantu Taman Lawang dan Indonesia Tanah Air Beta. Sebanyak 91 orang pergi ke bioskop. Jika 45 orang menonton Hantu Taman Lawang, dan 11 orang menonton keduanya, berapa orang yang menonton Indonesia Tanah Air Beta? Berapa banyak karcis yang terjual di bioskop hari itu?

7. Tujuh puluh lima gelas minuman terjual di sebuah warung, dan ada dua jenis minuman: teh dan kopi. Jika 59 orang meminum teh dan 18 orang meminum kopi, berapa orang yang meminum keduanya?
8. Ada 100 siswa dan tiga sesi latihan ditawarkan: sepakbola tiap hari Jumat, bola basket tiap hari Sabtu dan bulu tangkis tiap hari Minggu. Beberapa siswa hanya memilih satu jenis olahraga, beberapa memilih dua jenis, dan beberapa memilih ketiganya. 40 siswa memilih sepakbola. Jika 15 orang memilih ketiga jenis olahraga, 5 memilih sepakbola dan basket tapi tidak memilih bulutangkis, dan 10 orang memilih hanya sepakbola, berapa siswa yang memilih bulutangkis dan sepakbola?
9. Ada 49 rumah di suatu desa yang memelihara binatang, yaitu kucing, anjing, atau monyet. Sebanyak 15 rumah hanya memelihara anjing, 10 rumah hanya memelihara kucing, 5 rumah memelihara hanya anjing dan kucing, dan 3 rumah memelihara ketiganya. Berapa banyak monyet di desa itu?
10. Ada tiga sistem operasi komputer: Windows, Mac, dan Linux. Ada 50 orang di lingkunganmu yang memiliki komputer. 16 diantaranya memiliki ketiga sistem operasi, 5 hanya memiliki Linux, 7 hanya memiliki Mac, dan 19 hanya memiliki Windows. Berapa total sistem operasi komputer yang ada di lingkunganmu?

Bab 7

Relasi

7.1 Pasangan Terurut

Dalam himpunan, dinyatakan secara implisit bahwa urutan elemen dalam himpunan tidaklah penting. Sehingga himpunan {1, 2} akan sama dengan himpunan {2, 1}. Pada saat tertentu urutan sangat penting artinya, misalkan pada geometri analitik bidang koordinat titik (x,y) digambarkan sebagai pasangan terurut bilangan. Sehingga titik (1,2) berbeda dengan titik (2,1). Untuk membedakan elemen a dan b pada suatu himpunan merupakan pasangan terurut atau bukan maka suatu pasangan terurut dinyatakan dalam kurung tertutup (a,b). a menyatakan elemen pertama dan b menyatakan elemen kedua.

Pada pasangan terurut didefinisikan dengan menggunakan himpunan.

Definisi : (a,b) = {{a},{a,b}}

Teorema : (a,b) = (c,d) jika dan hanya jika a = c dan b = d

Teorema ini sering disebut sifat dasar pada suatu pasangan terurut.

Bukti:

1. jika $a = c$ dan $b = d$ maka $(a,b) = \{\{a\}, \{a,b\}\} = \{\{c\}, \{c,d\}\} = (c,d)$
2. jika $(a,b) = (c,d)$ maka menurut definisi $\{\{a\}, \{a,b\}\} = \{\{c\}, \{c,d\}\}$

Dari $\{\{a\}, \{a,b\}\} = \{\{c\}, \{c,d\}\}$ akan dibuktikan bahwa $a = c$ dan $b = d$.

Terdapat dua kasus,

Kasus pertama untuk $a = b$

Jika $a = b$ maka $\{a\} = \{a,b\}$ sehingga $(a,b) = \{\{a\}\}$.

Karena $(a,b) = (c,d)$ maka $\{\{a\}\} = \{\{c\}, \{c,d\}\}$, jelas bahwa himpunan di ruas kiri memiliki satu anggota maka ruas kanan seharusnya juga memiliki satu anggota.

Jadi $\{c\} = \{c,d\}$ akibatnya $c = d$.

Dan $\{\{a\}\} = \{\{c\}\}$ maka $\{a\} = \{c\}$.

Sehingga $a = c$, akibatnya $a = b = c = d$.

Kasus kedua untuk $a \neq b$

Karena $(a,b) = (c,d)$ maka $\{a\} \in \{\{c\},\{c,d\}\}$

Sehingga $\{a\} = \{c\}$ atau $\{a\} = \{c,d\}$, akibatnya $a=c$

Karena $(a,b) = (c,d)$ maka $\{a,b\} \in \{\{c\},\{c,d\}\}$

Sehingga $\{a,b\} = \{c\}$ atau $\{a,b\} = \{c,d\}$

Karena $a \neq b$ dan $\{c\}$ hanya memiliki sebuah elemen maka $\{a,b\} = \{c,d\}$

Demikian juga, $a = c$, $a \neq b$ dan $b \in \{c,d\}$ akibatnya $b=d$.

Contoh :

Jika $A = \{1, 2, 3\}$ maka semua pasangan terurut (x,y) sedemikian hingga $x \in A$ dan $y \in A$, adalah (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3).

7.2 Hasil Kali Kartesius

Perkalian kartesius (*Cartesian product*) dari himpunan A dan B adalah himpunan yang elemennya semua pasangan berurutan (*orders pairs*) yang mungkin terbentuk dengan komponen pertama dari himpunan A dan komponen himpunan B. Misalkan A dan B himpunan. Perkalian himpunan A dan B dinyatakan dengan AxB adalah himpunan yang anggotanya pasangan terurut (a,b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$.

Secara simbolik dapat ditulis sebagai berikut :

$A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B \}$

Contoh:

$A = \{a, b\}$ dan $B = \{ 1, 2, 3\}$ maka $A \times B = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3) \}$ sedangkan $B \times A = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\}$.

Perhatikan bahwa A x B tidak sama dengan B x A, kecuali dalam beberapa kasus, seperti jika A = B. Kardinalitas dari A x B memenuhi persamaan :

$n(A \times B) = n(A) \times n(B)$

1) $C = \{1, 2\}$ maka $C \times C = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$

2) Jika R suatu bilangan real maka $R \times R = \{(x,y) / x,y \in R)$. Secara geometris merupakan suatu bidang.

3) Jika $A = \{ x / a < x < b\}$ dan $B = \{y / c < y < d\}$ maka $A \times B$ adalah daerah dalam persegi panjang dengan titik-titik sudut (a,c); (a,d); (b,d) dan (b,c).

7.3 Relasi

Perhatikan bahwa ada hubungan antara himpunan anak = {Tino, Ayu, Togar, Nia} dengan himpunan alat tulis = {buku tulis, pensil, penggaris, penghapus, bolpoin, tempat pensil}. Himpunan anak dengan himpunan alat tulis dihubungkan oleh kata membeli. Dalam hal ini, kata membeli merupakan relasi yang menghubungkan himpunan anak dengan himpunan alat tulis.

Jadi, relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah hubungan yang memasangkan anggota-anggota himpunan A dengan anggota-anggota himpunan B. Relasi (hubungan) dari suatu himpunan ke himpunan lain adalah pasangan anggota-anggota suatu himpunan dengan anggota-anggota himpunan.

7.3.1 Pengertian Relasi

Antara elemen-elemen dari dua buah himpunan seringkali terdapat suatu relasi atau hubungan tertentu. *Relasi* menurut bahasa berarti *hubungan.* Dalam matematika, *relasi* atau *hubungan* menyatakan hubungan antara anggota suatu himpunan dengan anggota himpunan yang lain.

Relasi dari himpunan A ke himpunan B, artinya memetakan setiap anggota pada himpunan A ($x \in A$) dengan anggota pada himpunan B ($y \in B$). Relasi antara himpunan A dan himpunan B *juga* merupakan himpunan, yaitu himpunan yang berisi pasangan berurutan yang mengikuti aturan tertentu, contoh $(x,y) \in R$. Relasi biner R antara himpunan A dan B merupakan himpunan bagian dari *cartesian product* $A \times B$ atau $R \subseteq (A \times B)$.

Contoh :

1) Terdapat empat siswa menyatakan mata pelajaran kesukaannya sebagai berikut:
   Ardi menyukai Bahasa Indonesia, Rini dan Indri menyukai Matematika, dan Mirza menyukai IPA.

Dari pernyataan di atas terdapat dua himpunan yaitu:
A = himpunan siswa
= {Ardi, Indri, Mirza, Rini}
B = himpunan mata pelajaran
= {Bahasa Indonesia, Matematika, IPA}
Relasi antara anggota himpunan A ke himpunan B yang mungkin adalah *menyukai, menggemari, menyenangi,* dsb.

2) Diberikan dua himpunan:
E = {1, 2, 3, 4, 5}
F = {0, 2, 4, 6}
Dari dua himpunan tersebut didapat :
1 dikawankan dengan 2, 4, dan 6
2 dikawankan dengan 4 dan 6
3 dikawankan dengan 6
4 dikawankan dengan 6

5 dikawankan dengan 6

Relasi antara anggota himpunan E ke anggota himpunan F yang mungkin adalah kurang dari. Dan sebaliknya, relasi antara anggota himpunan F ke anggota himpunan E yang mungkin adalah lebih dari.

Dari dua contoh di atas, himpunan A dan E disebut daerah asal (domain), dan himpunan B dan F disebut daerah kawan (kodomain). Sementara itu menyukai dan kurang dari disebut relasi. Himpunan semua anggota kodomain disebut range atau daerah hasil.

7.3.2 Notasi Dalam Relasi

Relasi antara dua buah objek dinyatakan dengan himpunan pasangan berurutan $(x,y) \in R$.

Contoh :

Relasi F adalah relasi ayah dengan anaknya, maka:

$F = \{(x,y) | x \text{ adalah ayah dari } y\}$

xRy dapat dibaca: x memiliki hubungan R dengan y

7.3.3 Cara Menyatakan Relasi

Relasi antara himpunan A dan B dapat dinyatakan dengan beberapa cara penyajian sebagai berikut:

Contoh :

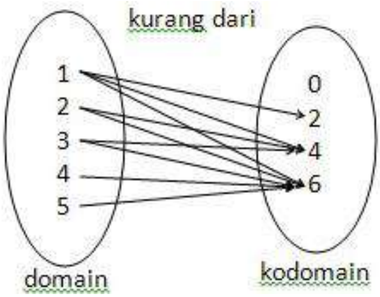
A = {1, 2, 3, 4, 5}

B = {0, 2, 4, 6}

1 dikawankan dengan 2, 4, dan 6
2 dikawankan dengan 4 dan 6
3 dikawankan dengan 4 dan 6
4 dikawankan dengan 6
5 dikawankan dengan 6

a. Diagram Panah

Himpunan A sebagai domain (daerah asal) diletakkan di sebelah kiri, dan himpunan B sebagai kodomain (kodomain) diletakkan di sebelah kanannya. Relasi antara himpunan A dan B ditunjukkan dengan arah panah. Seperti gambar di bawah ini!

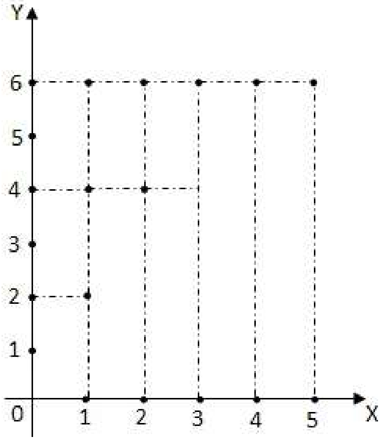


b. Himpunan Pasangan Berurutan

Jika x elemen A dan y elemen B, maka relasi dari A ke B dapat dinyatakan dengan pasangan berurutan (x, y). Dari diagram panah di atas dapat dituliskan himpunan pasangan berurutannya sebagai berikut: {(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 4), (2, 6), (3, 4), (3, 6), (4, 6), (5, 6)}.

c. Diagram Kartesius

Pada koordinat cartesius daerah asal (domain) diletakkan pada sumbu X (sumbu mendatar) dan daerah kawan (kodomain) diletakkan pada sumbu Y (sumbu tegak). Sedangkan daerah hasilnya merupakan titik (noktah) koordinat pada diagram cartesius. Dari relasi di atas, dapat ditunjukkan diagram cartesiusnya seperti di bawah ini!



d. Tabel

Dari contoh diatas, dapat dibuat tabel seperti dibawah ini :

A	**B**
1	2
1	4
1	6
2	4
2	6
3	4
3	6
4	6
5	6

e. Matriks

Baris = domain

Kolom = kodomain

B \ A	**0**	**2**	**4**	**6**
1	0	1	1	1
2	0	0	1	1
3	0	0	1	1
4	0	0	0	1
5	0	0	0	1

Bentuk matrik :

$$\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\end{array}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

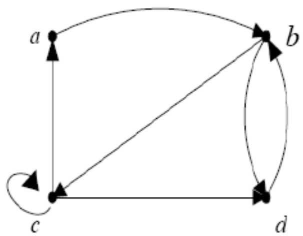
f. Graph Berarah

1) Hanya untuk merepresentasikan relasi pada satu himpunan (bukan antara dua himpuanan).
2) Tiap unsur himpunan dinyatakan dengan sebuah titik (disebut juga simpul atau *vertex*).
3) Tiap pasangan terurut dinyatakan dengan busur

(arc).

4) Jika $(a, b) \in R$, maka sebuah busur dibuat dari simpul a ke simpul b.
5) Simpul a disebut simpul asal (*initial vertex*)
6) Simpul b disebut simpul tujuan (*terminal vertex*)
7) Pasangan terurut (a, a) dinyatakan dengan busur dari simpul a ke simpul a sendiri. Busur semacam itu disebut *loop*

Contoh :
Misalkan $R = \{(a, b), (b, c), (b, d), (c, c)\ (c, \mathrm{a}), (c, d), (d, b)\}$ adalah relasi pada himpunan $\{a, b, c, d\}$.



7.3.4 Sifat-sifat Relasi

a. Relasi Refleksif (Bercermin)

Relasi disebut *refleksif* jika dan hanya jika untuk setiap x anggota semesta-nya, x berelasi dengan dirinya sendiri. Jadi R refleksif jika dan hanya jika xRx.

Contoh :

Jika diketahui A = {1,2,3,4} dan relasi R= {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)} Pada A, maka R x∈A adalah refleksif, karena untuk setiap x∈A terdapat (x,x) pada R. Perhatikan relasi pada himpunan = {1, 2, 3, 4} berikut:

R1= {(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)}

R2= {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)}

Relasi-relasi tersebut merupakan relasi refleksif karena memiliki elemen (1,1), (2,2), (3,3), dan (4,4).

b. Relasi Irrefleksif

Relasi R pada A disebut *Irrefleksif* (anti refleksif) jika dan hanya jika setiap elemen di dalam tidak berelasi dengan dirinya sendiri. Jadi, *irrefleksif* jika dan hanya jika x ~~R x.~~

Contoh :

Diketahui himpunan B= {a,b,c} dan relasi R= {(a,c), (b,c), (b,a)}. Relasi R adalah irrefleksif, karena (a,a), (b,b), dan (c,c) bukan elemen.

Diketahui A= {1,2,3,4} dan relasi R= {(2,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)}. Relasi R merupakan relasi irrefleksif, karena tidak terdapat elemen (x,x), dimana x∈A.

c. Relasi Nonrefleksif

Relasi R pada A disebut *nonrefleksif* jika dan hanya jika ada sekurang-kurangnya satu elemen di dalam A yang tidak berelasi dengan dirinya sendiri.

Contoh :

Perhatikan relasi pada himpunan A= {1,2,3,}

R= {(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3)}

Relasi tersebut merupakan relasi non refleksif, karena ada (1,2) dan (2,3).

d. Relasi Simetri

Relasi R disebut *simetri* pada S jika dan hanya jika setiap dua anggota a dan b dari S berlaku jika a berelasi R dengan b maka b juga berelasi dengan a. secara simbolik $aRb \rightarrow bRa$.

Contoh:

1. Relasi R = {(a,b), (b,a), (a,c), (c,a) } dalam himpunan {a, b, c}.
2. Ani menyukai Budi, Budi menyukai Ani {(Ani, Budi), (Budi, Ani)}

e. Relasi Asimetri

Relasi R disebut *asimetri* pada S jika dan hanya jika setiap dua anggota a dan b dari S berlaku : jika a berelasi R dengan b maka b tidak berelasi R dengan a. Secara simbolik : R asimetri pada S $(\forall a,b \in S)\ aRb \rightarrow bRa$.

Contoh:

Relasi R = { (a,b), (b,c), (c,a) } dalam himpunan { a, b, c }.

f. Relasi Nonsimetri

Relasi R disebut nonsimetro pada S jika dan hanya jika ada dua anggota a dan b dari S sedemikian hingga berlaku : a berelasi R dengan b tetapi b tidak berelasi R dengan a. perhatikan bahwa nonsimetri adalah negasi atau ingkaran dari simetri.

Contoh:

Relasi R = { (a,b), (a,c), (c,a) } dalam himpunan {a, b, c}

g. Relasi Antisimetri

Relasi R disebut *antisimetri* pada S jika dan hanya jika setiap dua anggota a dan b dari S berlaku: jika a berelasi R dengan b dan b berelasi R dengan a maka a = b.

Contoh:

1) A = keluarga himpunan.
   Relasi " himpunan bagian" adalah relasi yang antisimetris pada A, karena untuk setiap dua himpunan x dan y, jika x y dan y x, maka x = y.
2) Relasi "kurang dari atau sama dengan (≤)" dalam himpunan bilangan real. Jadi, relasi "kurang dari atau sama dengan (≤)" bersifat anti simetri, karena jika a ≤ b dan b ≤ a berarti a = b.
3) Relasi "habis membagi" pada himpunan bilangan bulat asli N merupakan contoh relasi yang tidak simetri karena jika a habis membagi b, b tidak habis membagi a, kecuali jika a = b. Sementara itu, relasi "habis membagi" merupakan relasi yang anti simetri karena jika a habis membagi b dan b habis membagi a maka a = b.

h. Relasi Transitif

R adalah relasi pada A. R disebut relasi *Transitif* pada A jika dan hanya jika setiap 3 anggota himpunan A, (a,b,c ∈ A) jika (a,b) ∈ R, dan (b,c) ∈ R maka (a,c) ∈ R (setiap tiga anggota a,b,c dari A, jika a berelasi dengan b dan b berelasi dengan c maka a berelasi dengan c).

Contoh:
Relasi R = {(a,b), (b,c), (a,c), (c,c) } dalam himpunan { a, b, c }.

i. Relasi Nontransitif

R adalah relasi pada A. R disebut relasi *nontransitif* pada A jika dan hanya jika ada tiga anggota himpunan A, ($a,b,c \in A$) sedemikian hingga $(a,b) \in R$, dan $(b,c) \in R$ dan $(a,c) \notin R$ (ada tiga anggota a,b,c dari A sedemikian hingga a berelasi dengan b dan b berelasi dengan c dan a tidak berelasi dengan c).
Contoh:
R = {(1,2),(2,3),(3,4)} dalam himpunan { 1, 2, 3, 4}

j. Relasi Intransitif

R adalah relasi pada himpunan A. R disebut relasi intransitif pada A jika dan hanya jika setiap tiga anggota himpunan A, ($a,b,c \in A$) jika $(a,b) \in R$ dan $(b,c) \in R$ maka $(a,c) \notin R$ (setiap tiga anggota a,b,c dari A, jika a berelasi dengan b dan b berelasi dengan c maka a tidak berelasi dengan c).
Misal E = {1,2,3}, R = {(1,2),(2,3),(2,5),(3,4),(5,7)}
Relasi di atas intransitif karena :
$(1,2)\in R$ dan $(2,3)\in R$, tetapi $(1,3)\notin R$
$(1,2)\in R$ dan $(2,5)\in R$, tetapi $(1,5)\notin R$
$(2,3)\in R$ dan $(3,4)\in R$, tetapi $(2,4)\notin R$
$(2,5)\in R$ dan $(5,7)\in R$, tetapi $(2,7)\notin R$

7.4 Operasi dalam Relasi

Operasi himpunan seperti irisan, gabungan, selisih, dan penjumlahan (beda setangkup) juga berlaku pada relasi.

Jika R_1 dan R_2 masing-masing merupakan relasi dari himpuna A ke himpunan B,
maka $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, $R_1 - R_2$, dan $R_1 \oplus R_2$ juga adalah relasi dari A ke B.

Contoh operasi relasi

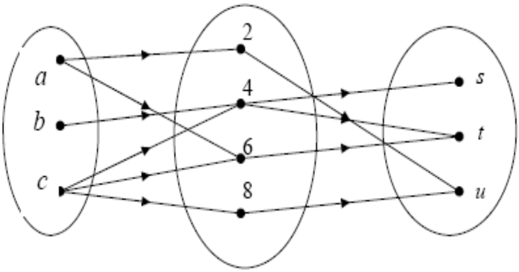
Misalkan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$.
Relasi $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$
Relasi $R_2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d)\}$
Maka :
$R_1 \cap R_2 = \{(a, a)\}$
$R_1 \cup R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$
$R_1 - R_2 = \{(b, b), (c, c)\}$
$R_2 - R_1 = \{(a, b), (a, c), (a, d)\}$
$R_1 \oplus R_2 = \{(b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$

7.4.1 Operasi komposisi

Operai komposisi merupakan gabungan dari dua buah relasi yang harus memenuhi syarat tertentu, yaitu jika R1 relasi dari A ke A dan R2 relasi dari A ke A, maka relasi komposisi R1 dan R2, dinyatakan oleh $R2_oR1$ berarti relasi R1 diteruskan oleh relasi R2. Syarat tersebut adalah jika (a, b) $\in$ R1 dan (b, c) $\in$ R2, maka (a, c) $\in$ R2∘R1.

Contoh operasi komposisi :
Misalkan, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ dan $C = \{s, t, u\}$
Relasi dari A ke B didefinisikan oleh :

R = {(a, 2), (a, 6), (b, 4), (c, 4), (c, 6), (c, 8)}
Relasi dari B ke C didefisikan oleh :
T = {(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)}
Maka komposisi relasi R dan T adalah
T o R = {(a, u), (a, t), (b, s), (b, t), (c, s), (c, t), (c, u)}



7.4.2 Operasi dalam bentuk matriks

Misalkan bahwa relasi R_1 dan R_2 pada himpunan A dinyatakan oleh matriks

$$R_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka

$$R_1 \cap R_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad R_1 \cup R_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

7.4.3 Domain, Range dan Kodomain pada Relasi

a. Domain (Daerah asal) dari Relasi R adalah himpunan bagian dari A yang terdiri atas elemen pertama dari semua pasangan terurut anggota R.

(D : {x/x ∈ A, (x,y) ∈ R }).

b. Range (Daerah hasil) dari Relasi R terdiri atas elemen kedua dari semua pasangan terurut anggota R. (Rg : { y/y ∈ B, (x,y) ∈ B}).

c. Kodomain (Daerah tujuan) anggotanya terdiri dari semua elemen yang ada pada daerah tujuan Relasi tersebut (Kd : {y/y ∈ B})

Latihan

1. Diketahui P :{1,2,5,6,8 }, Q : { 1,2,3,4,10,12,16} dan Relasi dengan kalimat terbuka "Dua Kali Dari" memasangkan anggota-anggota dari Q ke P.
   a. Gambarkan diagram panah Relasi tersebut
   b. Tentukan himpunan pasangan terurut dari relasi tersebut
   c. Sajikan relasi dari Q dan P tersebut dengan diagram Koordinat

2. Diketahui R : {(-3,3),(2,-2),(5,-5),(-1,1), (-7,7) }
   a. Gambarkan relasi R tersebut dengan diagram koordinat!
   b. Tentukan Domain (D), Range (Rg) dan Kodomain (Kd) dari relasi R di atas!
   c. Tentukan kalimat terbuka yang memenuhi relasi tersebut!

3. Diketahui A = Himpunan bilangan cacah <4 dan B =

{x/x < 6,x bilangan asli}. Jika R adalah Relasi dengan kalimat terbuka "lebih kecil dari" himpunan A ke himpunan B, maka tentukan :

a. Himpunan pasangan terurut yang memenuhi Relasi A ke B tersebut
b. Relasi invers dari relasi tersebut!
c. Domain, Range dan Kodomain dari R^{-1} yang memenuhi!

Bab VIII

Fungsi

8.1 Pengertian Fungsi

Sebelum sampai kepada pengertian fungsi, kita perlu mengenal apa tujuan mempelajari fungsi yang mana akan membawa kita kepada istilah ***relasi***. Dalam kehidupan sehari-hari terdapat banyak relasi, misalnya relasi “adik dari” , “ibu kota dari”, “setengah dari”

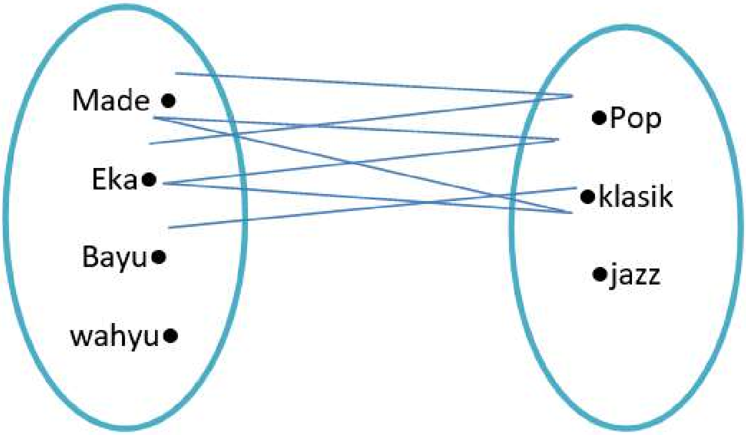
Apa itu relasi? Relasi adalah ***suatu aturan*** yang ***memasangkan*** anggota-anggota himpunan A dengan anggota himpunan B.

Ada 3 cara menyatakan relasi :

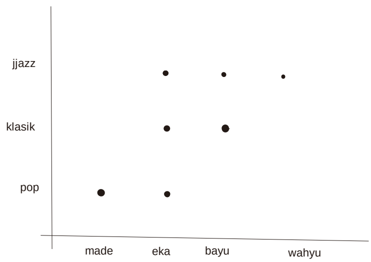
a. Digram panah
b. Diagram cartesius
c. Himpunan pasangan berurutan

Contoh diagram panah :

Relasi “gemar”



Contoh diagram cartesius



Contoh diagram himpunan pasangan berurutan:

(made,pop), (eka,pop), (eka,klasik), (eka,jazz), (bayu,klasik), (bayu, jazz), (wahyu,jazz)

Dalam kehidupan sehari-hari kita dapat melihat bahwa suatu besaran (kuantitas) bergantung pada satu atau lebih besaran lain. Misalnya pertumbuhan tanaman bergantung pada banyak sinar matahari dan curah hujan. Kecepatan mobil bergantung pada ukuran mesin dan lainnya. Menentukan hubungan antara besaran yang satu dengan besaran yang lainnya adalah hal yang sangat penting untuk dipelajari. Dalam matematika, hubungan antar besaran dinamakan fungsi.

Fungsi dalam istilah matematika merupakan pemetaan setiap anggota sebuah himpunan (dinamakan sebagai domain atau variabel bebas) kepada anggota himpunan yang lain (dinamakan sebagai kodomain atau variabel terikat) yang dapat dinyatakan dengan lambang y = f(x), atau dapat menggunakan lambang g(x), P(x). Ini berbeda pengertiannya dengan kata yang sama yang dipakai sehari-hari, seperti "alatnya berfungsi dengan baik Konsep fungsi adalah salah satu konsep dasar dari matematika dan setiap ilmu kuantitatif. Istilah "fungsi", "pemetaan", "peta", "transformasi", dan "operator" biasanya dipakai secara sinonim.

Untuk mendefinisikan fungsi dapat digunakan notasi berikut. F : A → B

Dengan demikian kita telah mendefinisikan fungsi f yang memetakan setiap elemen himpunan A kepada B. Notasi ini hanya mengatakan bahwa ada sebuah fungsi f yang memetakan dua himpunan, A kepada B. Tetapi bagaimana tepatnya pemetaan tersebut tidaklah terungkapkan dengan baik. Maka kita dapat menggunakan notasi lain x ε A.

Fungsi dikelompokkan menjadi tiga jenis yaitu fungsi injektif, surjektif dan bijektif.

8.2 Fungsi Injektif, surjektif dan Bijektif

8.2.1 fungsi injektif

Fungsi injektif adalah fungsi satu-satu artinya $x_1 \neq x_2$, maka $f(x_1) \neq f(x_2)$

Pasangan himpunan daerah asal dengan daerah kawan tidak boleh sama.

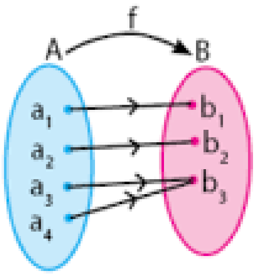
8.2.1 Fungsi bijektif

Fungsi bijektif adalah suatu fungsi yang setiap anggota di daerah asal hanya memiliki tepat satu pasangan dengan daerah kawan, begitu juga sebaliknya. Biasa disebut korespondensi satu-satu.

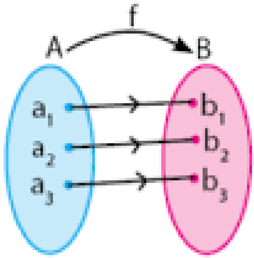
8.2.3 fungsi Surjektif

Fungsi surjektif adalah suatu fungsi yang himpunan daerah hasilnya merupakan himpunan daerah kawan, artinya setiap amggota di daerah kawan memiliki pasangan dengan anggota himpunan daerah asal (pasangan himpunan daerah asal dengan daerah kawan boleh sama)

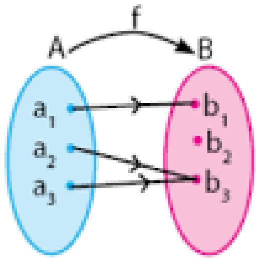
Untuk lebih jelas membedakan ketiganya, berikut contohnya:



Surjektif



Surjektif



Bukan Surjektif

8.3 Komposisi dan Invers

8.3.1 Komposisi

Fungsi komposisi merupakan susunan dari beberapa fungsi yang terhubung dan bekerja sama.

Contohnya, sebuah pabrik kertas dalam memproduksi kerts harus melalui beragai tahapan penting. Bahan baku yang diperlukan dalam pembuatan kertas yaitu batang kayu pohon yang tentunya tidak sembarang pohon. Salah satu pohon yang dipilih adalah pohon pinus yang memiliki serta panjang.

Proses pembuatan diawali dengan mengupas kulit batang pohon. Setelah itu, batang pohon tersebut dimasukkan ke dalam mesin untuk dipotong-potong sehingga ukurannnya menjadi lebih kecil. Kemudian, otongan-potongan itu dimasukkan ke dalam wadah besar untuk dihancurkan dan dibuat bubur kayu. Bubur kayu tersebut akan dicetak menjadi kertas yang sesuai dengan ukuran menggunakan mesin khusus pencetak kertas. Dalam mesin tersebut terdapat silinder besar untuk membantu proses pengeringan dan penggulungan kertas. Dalam proses yang berkesinambungan ini mengolah kayu menjadi kertas.

Dalam matematika, proses berkesinambungan ini menggambarkan konsep komposisi fungsi. Sebagai ilustrasi jika fungsi f dan g adalah mesin yang bekerja beriringan. Fungsi f menerima input berupa (x) yang akan diolah di mesin f dan menghasilkan outpun berupa f(x). kemudian f(x) dijadikan input untuk diproses di mesin g sehingga didapat output berupa g(f(x)).

Ilustrasi tersebut jika dibuat dalam fungsi merupakan komposisi g dan f yang dinyatakan dalam $g \circ f$ sehingga : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

1) Operasi Aritmatika Fungsi

a. Operasi Aljabar pada Fungsi

Jika f dan g merupakan fungsi, berlaku sifat-sifat aljabar sebagai berikut :

(1) Penjumlahan fungsi : $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
(2) Pengurangan fungsi : $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
(3) Perkalian fungsi : $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$
(4) Pembagian fungsi : $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$

b. Sifat-sifat aljabar pada fungsi

(1) sifat komutatif pada penjumlahan

: $(p + q)(x) = (p + q)(x)$

(2) sifat asosiatif pada penjumlahan

: $((p + q) + r)(x) = (p + (q + r))(x)$

(3) sifat komutatif pada perkalian

: $(p \times q)(x) = (p \times q)(x)$

(4) sifat asosiatif pada perkalian

: $((p \times q) \times r)(x) = (p \times (q \times r))(x)$

c. Daerah Asal (Domain) Fungsi Hasil Operasi Aljabar Dua Fungsi atau Lebih

Diketahui f dan g merupakan fungsi dengan D_f = daerah asal fungsi f dan D_g = daerah asal fungsi g. daerah asal operasi aljabar dua fungsi sebagai berikut :

(1) Daerah asal fungsi $(f + g)(x)$: $D_{f+g} = D_f \cap D_g$
(2) Daerah asal fungsi $(f - g)(x)$: $D_{f-g} = D_f \cap D_g$
(3) Daerah asal fungsi $(f \times g)(x)$: $D_{f\times g} = D_f \cap D_g$
(4) Daerah asal fungsi $(\frac{f}{g})(x)$: $D_f = D_f \cap D_g \cap \{x|\ g(x) \neq 0\}$

d. Sifat-sifat Hasil Operasional Fungsi

Hasil operasi dua atau lebih fungsi berupa fungsi baru. Fungsi tersebut dapat bersifat injektif, bijektif atau surjektif

2) Operasi Komposisi Fungsi

a. Definisi Komposisi Fungsi

Jika f dan g fungsi dan $R_f \cap D_g \neq O$ maka terdapat suatu fungsi h dari himpunan bagian D_f ke himpunan bagian R_g yang disebut fungsi komposisi f dan g (di tulis $g \circ f$ dan dibaca g bundaran f) yang ditentukan dengan $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$

b. Sifat-sifat Komposisi Fungsi

(1) Pada operasi komposisi fungsi tidak berlaku sifat komutatif yaitu :

$g \circ f \neq g \circ f$

(2) Pada operasi komposisi fungsi berlaku sifat asosiatif yaitu :

$f \circ (g \circ h) \neq (f \circ g) \circ h$

(3) pada operasi komposisi fungsi berlaku sifat identitas yaitu :

$f \circ I = I \circ f = f$

Contoh soal :

Pembuatan kertas pada sebuah pabrik industry melalui dua tahap. Tahap pertama menggunakan mesin I yang menghasilkan bahan kertas setengah jadi dengan mengikuti fungsi $f(x) = 0{,}8x - 30$. Tahap kedua menggunakan mesin II yang menghasilkan kertas dengan mengikuti fungsi $g(x) = 0{,}01x2 + 0{,}7x$, x merupakan bahan dasar kayu dalam satu ton. Jika bahan dasar kayu yang tersedia 150 ton, berat kertas yang dihasilkan adalah …. Ton

Caranya :

Fungsi yang menyatakan tahap pertama yaitu f(x) = 0,8x – 30

Fungsi yang menyatakan tahap kedua yaitu g(x) = 0,01x2 + 0,7x

Hasil produksi tahap I:

Untuk x=150, diperoleh

F(x) = 0,8x – 30

= 0,8 × 150 – 30 = 90

Hasil produksi tahap I adalah 90 ton bahan kertas setengah jadi.

Hasil produksi tahap II :

Karena hasil produksi pada tahap I akan dilanjutkan pada produksi tahap II, maka hasil produksi tahap I menjadi bahan dasar produksi tahap II, sehingga diperoleh:

g(x) = 0,01x2 + 0,7x

= 0,01 × (90)2 + 0,7 × 90

= 0,01 × 8100 + 63 = 81 + 63 = 144

Dengan demikian hasil produksi tahap II adalah 144 ton kertas.

Jadi, berat kertas yang dihasilkan adalah 144 ton.

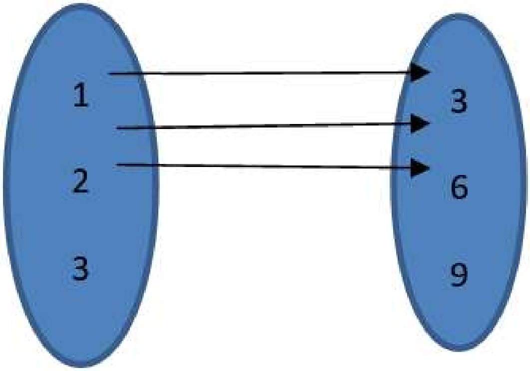
8.3.2 Fungsi Invers

Sebuah industri yang berskala nasional tentu telah memperhitungkan target produksi dalam periode tertentu. Misalnya sebuah pabrik kertas memiliki target produksi kertas setiap bulan sebanyak y ton. Untuk memproduksi kertas sebanyak itu tentu memerlukan bahan baku kayu yang tidak sedikit. Untuk menentukan banyak kayu maka membuat balikan dari fungsi kertas yang dihasilkan.

Misalkan banyak kertas yang dihasilkan adalah $y = f(x)$, dengan x adalah banyak kayu. Banyak kayu yang diperlukan untuk menghasilkan kertas dapat dicari dengan membalik fungsi $x = f(y)$.

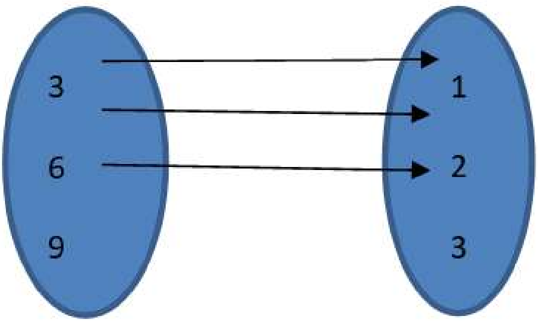
Kebalikan fungsi ini dinamakan fungsi invers.

1. Definisi Invers Fungsi
   Jika fungsi f memetakan A ke B dan dinyatakan dalam pasangan berurutan f = {(x,y) | x elemen A dan y elemen B}, invers fungsi adalah relasi yang memetakan B ke A. invers fungsi f dinotasikan sebagai f-1 dan dinyatakan dalam pasangan berurutan f-1 = {(y,x) | y elemen B dan x elemen A}
   Cermati diagram berikut : $f(x) = 3x$



Fungsi g(x) merupakan fungsi f(x) sehingga $f^{-1}(x) = g(x) = \frac{x}{3}$

Cermati diagram berikut : $g(x) = \frac{x}{3}$



Pada diagram panah tersebut, fungsi f mengawankan setiap anggota x elemen A ke y elemen B yaitu {(1,3), (2,6), (3,9)}. Sementara itu, fungsi g mengawankan setiap y elemen B ke x elemen A yaitu {(3,1), (6,2), (9,3)}

2. Fungsi invers
   a. Pengertian fungsi invers
      Invers suatu fungsi belum tentu berbentuk fungsi.
      Jika invers suatu fungsi berbentuk fungsi, invers tersebut disebut fungsi invers
   b. Sifat-sifat fungsi invers
      1) Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ dikatakan memiliki fungsi invers $f^{-1} : B \rightarrow A$ jika dan hanya jika fungsi f merupakan fungsi bijektif
      2) Misalkan f^{-1} adalah fungsi invers dari fungsi f. untuk setiap x elemen D_f dan y elemen R_f, berlaku $y = f(x)$ jika dan hanya jika $f^{-1}(y) = x$
      3) Misalkan f sebuah fungsi bijektif dengan daerah asal D_f dan daerah hasil R_f, sedangkan $f(x) = x$ merupakan fungsi identitas. Fungsi f^{-1} merupakan fungsi invers dari fungsi f jika dan hanya jika $(f^{-1} \circ f)(x) = x = I(x)$ untuk setiap x elemen D_f dan $(f \circ f^{-1})(x) = x = I(x)$ untuk setiap x elemen R_f
      4) Jika sebuah fungsi bijektif dan f^{-1} merupakan fungsi invers f, fungsi invers dari f^{-1} adalah fungsi f itu sendiri, disimbolkan $(f^{-1})^{-1} = f$
      5) Jika f dan g fungsi bijektif berlaku
         $\boxed{(f \circ g)^{-1} = (g^{-1} \circ f^{-1}) \text{ dan } (g \circ f)^{-1} = (f^{-1} \circ g^{-1})}$

Dengan cara yang sama diperoleh sifat berikut

$(f \circ g \circ h)^{-1} = (h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1})$

8.4 Peta dan Prapeta

Apabila f memeteakan suatu elemen A ke B dikatakan bahwa f(x) adalah ***peta*** dari x oleh f yang dinotasikan dengan f(x) sedangkan x disebut ***prapeta*** f(x).

Contoh soal :

Suatu fungsi dirumuskan f(x) = 4x – 1 prapeta dari -13 adalah ...

Caranya :

Himpunan A adalah himpunan dari "prapeta"

Himpunan B adalah himpunan "peta" atau bayangan

Prapeta dari -13 artinya mencari nilai x sehingga f(x) = -13

$f(x) = 4x - 1$

$-13 = 4x - 1$

$-12 = 4x$

$-3 = x$

Jadi prapeta dari f(x) = 4x -1 adalah -3

8.5 Latihan Soal

1. Suatu fungsi atau pemetaan dinyatakan dengan $x \rightarrow \frac{1}{2}(5-x)$, dengan daerah asal {-3, -1, 1, 3, 5}. Daerah bayangan (range) nya adalah …
2. Diketahui :
   P = {x | 11 < x < 23, x bilangan prima}
   Q = {y | 4 < y2 < 25, y bilangan cacah}
   Banyak semua fungsi yang mungkin dari himpunan P ke himpunan Q adalah …
3. Fungsi $f : x \rightarrow ax^2 + bx$ dengan a dan b bilangan bulat
   a. jika f(1) = 1 dan f(3) = 0, hitunglah nilai a dan b
   b. tentukan bentuk fungsi f
   c. tentukan bentuk fungsi f(-5)
4. Penghasilan per bulan seorang karyawan dinyatakan oleh komposisi $(f \circ g)(x)$ dengan f(x) = 2.000.000 + 3.000x, g(x) = 0,4x dan x menyatakan banyak unit barang yang laku ia jual. Tentukan :
   a. fungsi yang menunjukkan penghasilan karyawan
   b. banyak barang yang laku ia jual jika penghasilanna Rp2.180.000
5. Diketahui fungsi f(x) = 3x + 4 dan $g(x) = \frac{4x-5}{2x+1}$, $x \neq -\frac{1}{2}$, invers $(f \circ g)(x)$ adalah …
6. Diketahui f-1, g-1 dan h-1 berturut-turut menyatakan invers fungsi f, g dan h. Jika $(f\text{-}1 \circ g\text{-}1 \circ h\text{-}1)(x) = 2x - 4$ dan $(h \circ g)(x) = \frac{x-3}{2x+1}$, $x \neq \frac{1}{2}$, nilai f(8) adalah ….
7. Jika fungsi f dan g memiliki invers dan memenuhi f(2x) = g(x-5), maka f-1(x) = …
8. Seorang wisatawan memiliki uang sebanyak 4.000 USD (Dolar Amerika). Wisatawan tersebut akan megunjungi Malaysia dan dilanjutkan ke Indonesia. Untuk keperluan

itu, dia harus menukarkan uang tersebut ke mata uang Ringgit (MYR) da mata uang Rupiah (IDR). Nilai tukar dari dolar ke ringgit adalah 1 USD = 4,1 MYR dengan biaya penukaran 2 USD. Adapun nilai tukar dari ringgit ke Rupiah adalah 1 MYR = 3.414,4 IDR dengan biaya penukaran 8 MYR. Tentukan :

a. Fungsi f(x) yang menyatakan nilai tukar dolar ke ringgit
b. Rungsi g(x) yang menyatakan nilai tukar ringgit ke rupiah
c. Fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$ yang menyatakan nilai tukar dolar ke Rupiah
d. Fungsi h(x) yang menyatakan nilai tukar Rupiah ke dolar

9. Untuk mencetak sebanyak x eksemplar buku. Suatu mesin printer memerlukan waktu yang dirumuskan dengan $f(x) = \frac{1}{50}(15x + 2)$ (dalam satuan jam). Biaya sewa mesin printer yang digunakan untuk mencetak dirumuskan dengan $g(x) = 10x + 2$ (dalam ribuan Rupiah) dengan x adalah lama waktu dalam jam.
Tentukan :
a. Rumus fungsi biaya sewa mesin h(x) jika akan mencetak sebanyak x eksemplar buku
b. Rumus fungsi banyaknya buku yang tercetak apabila biaya sewa mesin (b) diketahui dan
c. Banyak buku yang dicetak apabila biaya sewa mesin sebesar Rp 362.400

10. Tentukan daerah asal dan daerah kawan setiap fungsi berikut agar mempunyai fungsi invers :
a. $f(x) = -x^2 + 2x + 15$
b. $f(x) = (x+2)^2 - 6$

Daftar Pustaka

Hermanto, Didik. 2013. *Modul Pengantar Dasar Matematika*. www.stkippgribklac.id

Karso. (2003). Pengantar Dasar Matematika, cetakan keempat. Jakarta: Pusat Penerbitan Universitas Terbuka Depdiknas

Masyirah. 2007. *Matematika Dasar*. Surabaya: Unipress Unesa.

Muhamad Subhan, 2018. Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Padang

Musser, Gary L., and W.F Berger. 1994. *Mathematics for Elementary Teachers*. New York: Macmillan College Company.

Negoro, S.T. 1992. *Ensiklopedia Matematika*: Ghalia Indonesia Rumus-rumus.com

Rosen. K,h. 2000. *Elementary Number Theory and ist Application*. New York: Addision Wesley Longman.

Seng, The Keng, and Looi Chin Keong. 2003, *New*

Syllabus *Mathematics* 2. Singapura: Shing Lee Publisher PTE. LTD

https://www.google.com/url?q=https://www.sheetmath.com/2016/04/implikasi-dan-biimplikasi-dalam-logika.html%3Fm%3D1&usg=AFQjCNHDiFo0hPq3Zef3YNN_5Urcp4AxgA
http://bektimatik.blogspot.com/2010/11/disjungsi-disjungsi-adalah-pernyataan.html?m=1

http://staffnew.uny.ac.id/upload/132315977/pendidikan/LogikaP11-Logika+Predikatif.pdf

https://dinus.ac.id/repository/docs/ajar/4-Logika-predikat1.ppt.pdf

file:///C:/Users/STELLA/Downloads/Buku%20Ajar%20PDM%202018%20(5).pdf

Profile

I Komang Sukendra, S.Pd., M.Si., M.Pd. Lahir 02 Agustus 1970 di Bugbug Kecamatan Karangasen, Kabupaten Karangasen Provinsi Bali. Putra dari pasangan I Ketut Kantun dan Ni Wayan Kupit. Menempuh pendidikan S1 STKIP Negeri Singaraja Bali Jurusan Pendidikan Matematika (1990-1996), S2 Universitas Mahasaraswati Denpasar Jurusan Perencanaan Pembangunan Wilayah dan Pengelolaan Lingkungan (2008-2010), S2 Universitas Ganesha (Undiksha) Jurusan Pendidikan Matematika (2012-2014); Sedang S3 di Undiksha, Ilmu Pendidikan Kosentrasi Pendidikan Matematika (2018-sekarang)

Pengalaman: (1) Sebagai Dosen di IKIP PGRI Bali di Pendidikan Matematika, (2) Sekretaris LPPM IKIP PGRI Bali periode 2016-2019 dan Periode 2019-2020 , (3) Sekretaris LPPM Universitas PGRI Mahadewa Indonesia Periode 2020-2024.

I Made Surat, Drs., M.Pd., Lahir 02 Januari 1961 di Buleleng- Bali. Putra dari I Made Merta dan Ni Nyoman Kerti. Menempuh pendidikan S1 FKIP UNUD di Singaraja Bali, pada Jurusan Pendidikan Matematika. (1980-1985). S2 pada Program Penelitian dan Evaluasi Pendidikan (PEP) Universitas Negeri Yogyakarta (1996-1999). Pengalaman (1) sebagai Ketua Jurusan Pendidikan Matematika di IKIP Mataram (1986-1996), dan kemudian pindah tugas di IKIP PGRI Bali dari tahun 2000 sampai sekarang. Menjabat sebagai PD III (2002-2006) dan menjabat sebagai ketua LPM FPMIPA (2007-2011).