STATISTIK

Peluang Bisnis

Dr. Drs. I Wayan Sudiarsa, M.Stats.

Dr. Ni Putu Ayu Mirah Mariati, S.Si., M.Si.

I Komang Sukendra, S.Pd., M.Pd., M.Si.

KLIK MEDIA

STATISTIK

Peluang Bisnis

Penulis:

Dr. Drs. I Wayan Sudiarsa, M.Stats., dkk.

ISBN:

978-623-363-163-1

Ukuran Buku:

14,8 x 21

Tebal Buku:

vi + 214 halaman

Desain Cover:

Sendy Boy

Layouter:

Ainunrh

Editor:

Teddy Fiktorius

Cetakan 1

Desember 2021

Dicetak & Diterbitkan Oleh:

KLIK MEDIA

Jl. Bromo 302 RT 01 RW 03 Kebonagung
Sukodono-Lumajang-Jawa Timur
Telp. 085259488719-081336335612

Anggota IKAPI

No. 275/JTI/ 2021

Prakata

Om Swastiastu

Puji syukur kami panjatkan kehadapan Tuhan Yang Maha Esa, karena berkat serta rahmat-Nyalah Buku Statistika Peluang Bisnis dapat diselesaikan. Semoga apa yang terdapat dalam isi buku ini dapat menambah wawasan bagi kita semua, khususnya yang menyangkut teori-teori statistika. Menyadari sepenuhnya bahwa dalam statistika, kita lebih banyak membicarakan tentang teori peluang. Karena teori ini pada hakekatnya suatu akal sehat yang disederhanakan menjadi perhitungan. Teori ini membuat kita bisa menghargai secara berhati-hati, apa yang dirasakan oleh pikiran tentang suatu insting. Sering tanpa mampu kita menjelaskannya. Sangat menakjubkan bahwa ilmu pengetahuan ini, yang muncul dari permainan judi, kemudian ternyata menjadi objek pengetahuan manusia yang terpenting. Dalam kehidupan dunia ini sebagian besar sebenarnya adalah hanyalah masalah "Peluang". Demikian dikatakan oleh matematikawan dan astronomi termasyur berkebangsaan Prancis (Newton dan Prancis) Pierre Simon, Marguis De Haplace.

Banyak orang merasa bahwa ahli ini juga merupakan salah satu, penyumbang besar bagi perkembangan peluang, agak sedikit membesar-besarkan. Namun kenyataannya memang demikian, bahwa teori peluang telah menjadi alat sangat ampuh bagi hampir semua ilmuwan, insinyur, dokter, juri dalam pengadilan dan industriwan. Orang yang telah terbuka pikirannya tidak lagi bertanya “Apakah Demikian” melainkan “Berapa peluang terjadi keadaan Demikian”.

Buku ini dimaksudkan sebagai suatu pengantar ke teori peluang bisnis bagi mahasiswa bidang matematika, rekayasa, dan ilmu-ilmu pengetahuan (termasuk ilmu pengetahuan sosial dan ilmu manajemen) yang telah memperoleh kuliah kalkulus dasar. Buku ini tidak hanya berupaya menyajikan matematika teori peluang. Namun juga berbagai macam penerapannya melalui banyak sekali contoh yang diberikan. Untuk lebih jelasnya dapat dibaca di masing bab.

Om Santi, Santi, Santi, Om.

Denpasar, Desember 2021

Penulis

Daftar Isi

Prakata ~ iii

Daftar Isi ~ v

Bab 1 Analisis Kombinatorial ~ 1

1.1 Pendahuluan ~ 1

1.2 Prinsip Dasar Mencacah ~ 1

1.3 Permutasi ~ 4

1.4 Kombinasi ~ 8

1.5 Koefisien Multinom ~ 14

1.6 Tentang Pembagian Kelereng di Dalam Kantun~18

Bab 2 Aksioma Peluang ~ 29

2.1 Pendahuluan ~ 29

2.2 Ruang Contoh dan Kejadian ~ 29

2.3 Aksioma Peluang ~ 35

2.4 Beberapa Proporsi Sederhana ~ 40

2.5 Ruang Contoh Dengan Hasil Percobaan Berpeluang Muncul Sama ~ 46

2.6 Peluang adalah suatu Fungsi Himpunan yang Kontinu ~ 61

Bab 3 Peluang Bersyarat dan Kebebasan ~ 87
3.1 Pendahuluan ~ 87
3.2 Peluang Bersyarat ~ 87
3.3 Rumus Bayes ~ 92
3.4 Kejadian-kejadian Bebas ~ 104
3.5 P (.IF) Adalah Suatu Fungsi Peluang ~ 120
Bab 4 Metodologi Statistik Peluang Bisnis ~ 159
4.1 Pengertian Model ~ 161
4.2 Spesifikasi Model ~ 167
4.3 Estimasi Model ~ 173
4.4 Evaluasi dan Hasil Estimasi ~ 174
4.5 Evaluasi Daya Peramalan ~ 179
Bab 5 Model Statistika Peluang Bisnis ~ 185
5.1 Model Ekonomi Mikro ~ 185
5.2 Fungsi Produksi ~ 186
5.3 Fungsi Permintaan ~ 193
5.4 Fungsi Penawaran ~ 195
5.5 Fungsi Biaya ~ 196
5.6 Model Pertumbuhan Penduduk ~ 198
5.7 Model Ekonomi Makro ~ 200
5.8 Beberapa Model Lain ~ 202
Daftar Pustaka ~ 208
Profil Penulis ~ 210

Bab 1
Analisis Kombinatorial

1.1 Pendahuluan

Banyak masalah di dalam teori peluang dapat dipecahkan cukup dengan cara mencacah banyaknya cara yang berbeda bagaimana suatu kejadian dapat terjadi. Teori matematis pencacahan dikenal dengan nama analisis kombinatorial.

1.2 Prinsip Dasar Mencacah

Prinsip pencacahan berikut ini sangat mendasar bagi semua pekerjaan kita nanti. Secara sederhana prinsip ini mengatakan bahwa jika satu percobaan (eksperimen) mempunyai m kemungkinan hasil percobaan (*outcome*) dan jika satu percobaan lain mempunyai n kemungkinan hasil percobaan, maka kedua percobaan ini mempunyai mn kemungkinan hasil percobaan.

Prinsip Dasar Pencacahan

Misalkan bahwa dua percobaan akan dilaksanakan. Maka jika percobaan 1 menghasilkan salah satu dari m kemungkinan hasil percobaan dan jika, untuk setiap hasil percobaan 1, ada n kemungkinan hasil percobaan dari percobaan 2, maka kedua percobaan itu mempunyai mn kemungkinan hasil percobaan.

Bukti Prinsip Dasar:

Prinsip dasar ini dapat dibuktikan dengan cara mencacah semua kemungkinan hasil percobaan dari kedua percobaan tadi sebagai berikut:

(1,1), (1,2), ..., (1, n)

(2,1), (2,2),...., (2, n)

:

(m,1), (m,2), ... (m,n)

Dalam hal ini kita mengatakan bahwa hasil percobaannya ialah (i, j) bila dari percobaan 1 muncul hasil percobaan ke-i dan dari percobaan 2 muncul hasil percobaan ke-j. Dengan demikian himpunan semua hasil percobaannya terdiri atas m baris dan setiap barisnya mengandung n unsur.

Contoh 1.1

Sebuah regu dua orang, terdiri atas 1 laki-laki dan 1 perempuan, akan dipilih dari satu grup 5 laki-laki dan 8 perempuan. Berapa banyak kemungkinan regu yang bisa dipilih?

Penyelesaian:

Dengan menganggap pemilihan laki-laki sebagai hasil percobaan 1, dan pemilihan perempuan sebagai hasil percobaan 2, maka dari prinsip dasar kita peroleh ada 5x8 40 kemungkinan regu.

Versi prinsip dasar umum yang lebih luas lagi mengatakan bahwa jika ada r percobaan sedemikian rupa sehingga percobaan pertama mempunyai n_1 kemungkinan hasil percobaan, dan untuk setiap kemungkinan hasil percobaan dari (i-i) percobaan yang pertama ada n_1, i = 1, 2,...., r, hasil percobaan dari percobaan ke-I, maka keseluruhan r percobaan ini mempunyai $n_1 n_2 .... n_r$ kemungkinan hasil percobaan.

Contoh 1.2

Sebuah panitia mahasiswa terdiri atas 3 freshmen (tingkat 1), 4 sophomore (tingkat 2), 5 junior (tingkat III), dan 2 senior (Tingkat IV) didalam kepanitian ini terdapat satu seksi beranggotakan 4 orang yang harus diambil masing-masing seorang dari setiap tingkat. Berapa banyak kemungkinan seksi yang bisa dibentuk?

Penyelesaian:

Dari versi prinsip dasar umum diperoleh ada 3x4x5x2 = 120 kemungkinan seksi yang bisa dibentuk.

Contoh 1.3

Suatu plat nomor kendaraan terdiri atas 3 huruf diikuti dengan 4 angka. Berapa banyak plat nomor kendaraan yang bisa dibuat?

Penyelesaian:

Dari versi prinsip dasar umum diperoleh jawabnya ialah 26x26x10x10x10x10 = 175.760.000

Contoh 1.4

Berapa banyak fungsi yang bisa dibentuk bila daerah definisinya terdiri atas n titik dan nilai fungsinya harus 0 atau 1?

Penyelesaian:

Misalkan titik-titik itu ialah 1,2, …. n. Karena f (i) harus 0 atau 1 untuk setiap i = 1,2, …. n, maka semuanya ada 2^n kemungkinan fungsi.

Contoh 1.5

Didalam Contoh 3, berapa banyak plat nomor kendaraan bila tidak boleh ada huruf maupun angka yang diulang?

Penyelesaian:

Dalam hal ini ada 26x25x24x0x9x8x7 = 78.624.000 kemungkinan plat nomor.

1.3 Permutasi

Berapa banyak susunan berbeda huruf-huruf a, b, dan c bisa dibentuk? Melalui pencacahan langsung kita peroleh ada 6; yaitu abc, acb, bac, bca, cab, dan cba. Setiap susunan ini dinamai permutasi. Jadi, ada 6 permutasi yang mungkin dibentuk dari 3 benda. Hasil ini juga bisa diperoleh dari prinsip diatas. Karena huruf pertama di dalam permutasi itu bisa salah satu dari 3 huruf yang mana saja, maka huruf kedua di dalam permutasi ini bisa dipilih yang mana saja dari 2 huruf sisanya, dan huruf yang ketiga diambil dari 1 huruf sisanya. Jadi, semuanya ada 3x2x1 = 6 kemungkinan permutasi.

Misalkan sekarang kita mempunyai n benda. Penalaran serupa seperti dalam paragraf sebelumnya menunjukkan bahwa ada n(n-1) (n-2) 3 x 2 x 1 = n!

Permutasi yang berbeda dan n benda.

Contoh 1.6

Berapa banyak urutan giliran memukul bet (*batting order*) bagi suatu regu bisbol yang terdiri atas 9 orang pemain?

Penyelesaian:

Ada 9! = 9x8x7x6x5x4x3x2x1

= 362.880 urutan yang berbeda.

Contoh 1.7

Sebuah kelas teori peluang terdiri atas 6 laki-laki dan 4 perempuan. Suatu tujuan diberikan dan kemudian mahasiswa diurutkan menurut hasil nilai ujian mereka. Misalkan tidak ada dua mahasiswa yang memperoleh nilai yang sama.

1. Ada berapa banyak urutan peringkat yang mungkin?

2. Bila laki-laki diurutkan diantara sesama mereka dan perempuan juga diurutkan diantara sesama mereka, berapa banyak urutan peringkat yang mungkin?

Penyelesaian

1. 10! = 3.628.800
2. (6!) (4!) = 17.800

Contoh 1.8

Jono mempunyai 10 buku yang hendak disusunnya di rak bukunya. Diantara buku-buku itu, 4 ialah buku matematika, 3 buku kimia, 2 buku sejarah, dan 1 buku bahasa. Jono hendak menata buku-bukunya sehingga semua buku yang sejenis tersusun tidak terpisah-pisah dirak buku tadi. Berapa banyak kemungkinan susunan yang berbeda?

Penyelesaian:

Ada 4! 3! 2! 1! Susunan dengan buku-buku matematika diurutan pertama, kemudian buku-buku kimia, kemudian buku-buku sejarah, dan terakhir buku bahasa. Begitu pula, untuk setiap susunan jenis buku ada 4! 3! 2! 1! Susunan yang mungkin.

Jadi, karena semuanya ada 4! Urutan jenis buku yang mungkin, maka jawaban yang dikehendaki ialah 4! 4! 3! 2! 1! = 6912.

Sekarang kita akan menentukan banyaknya permutasi n benda bila sejumlah tertentu benda itu tidak bisa dibedakan satu dan yang lain. Untuk memperjelas apa yang dimaksud, simaklah contoh di bawah ini.

Contoh 1.9

Berapa banyak susunan huruf yang berbeda yang dapat dibentuk dari huruf -huruf P E P P E R?

Penyelesaian

Pertama-tama perhatikan bahwa ada 6! Permutasi huruf-huruf P_1 E_1 P_2 P_3 E_2 R bila ketiga P dan kedua E dapat dibedakan satu dari yang lain. Akan tetapi, perhatikan salah satu yang mana saja dari permutasi-permutasi ini, misalnya P_1 E_1 P_2 P_3 E_2 R bila sekarang permutasikan ketiga huruf P dan juga kedua huruf E itu diantara mereka sendiri, maka susunan yang dihasilkan tetap berbentuk P P E P E R. artinya, semua 3! 2! Permutasi

P_1 E_1 P_2 P_3 E_2 R P_1 E_1 P_2 P_3 E_1 R

P_1 E_1 P_2 P_3 E_2 R P_1 E_1 P_2 P_3 E_1 R

P_1 E_1 P_2 P_3 E_2 R P_1 E_1 P_2 P_3 E_1 R

P_1 E_1 P_2 P_3 E_2 R P_1 E_1 P_2 P_3 E_1 R

P_1 E_1 P_2 P_3 E_2 R P_1 E_1 P_2 P_3 E_1 R

P_1 E_1 P_2 P_3 E_2 R P_1 E_1 P_2 P_3 E_1 R

Berbentuk PPEPER. Jadi, semuanya ada 6! / 3!.2! = 60 susunan yang mungkin dari huruf P P E P E R

Secara umum, penalaran serupa yang digunakan didalam Contoh 9 menunjukkan bahwa ada:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}$$

Permutasi yang berbeda dari n benda, yang n_1 diantaranya sama n_2 diantaranya sama, ... n, di antaranya sama.

Contoh 1.10

Dalam berapa banyak cara 3 kelereng putih, 4 kelereng merah, dan 4 kelereng hitam dapat disusun membentuk satu barisan bila kelereng-kelereng yang berwarna sama tidak dapat dibedakan satu dari yang lain?

Penyelesaian: ada 11! / 3! 4! 4! = 11.550 susunan yang mungkin.

1.4 Kombinasi

Seringkali kita tertarik untuk menentukan banyaknya grup r benda yang berbeda yang dapat dibentuk dari sejumlah n benda. Sebagai missal, berapa banyak grup 3 benda yang berbeda dapat diambil dari 5 benda A, B, C, D, dan E? Untuk menjawab ini, bernalarlah sebagai berikut: karena ada 5 cara untuk memilih benda pertama, 4 cara untuk memilih benda kedua, dan 3 cara untuk memilih benda ketiga, maka seluruhnya ada 5x4x3 cara memilih grup 3 benda bila urutan terpilihnya benda-benda itu diperhatikan. Akan tetapi, karena setiap grup 3 benda, katakanlah grup yang terdiri atas benda-benda A, B, dan C, akan tercacah 6 kali (artinya semua permutasi ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, dan CBA akan dicacah bila urutan benda-benda itu diperhatikan), maka banyaknya grup yang dapat dibentuk ialah:

$$\frac{5x4x3}{3x2x1} = 10$$

Secara umum, karena n (n-1) (n-r-1) menyatakan banyaknya cara yang berbeda untuk memilih suatu grup r benda dari n benda yang tersedia bila urutannya diperhatikan, dan karena setiap grup r benda akan bercacah r! kali dalam pencacahan ini, maka banyaknya grup r benda yang berbeda yang dapat dibentuk dari sejumlah n benda lain:

$$\frac{n(n-1)...(n-r-1)}{r!} = \frac{n!}{(n-1)!r!}$$

Notasi dan Terminologi

Kita definisikan $\binom{n}{r}$, untuk r ≤ n, sebagai

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-1)!r!}$$

dan mengatakan bahwa $\binom{n}{r}$ adalah banyaknya kombinasi r benda dari sejumlah n benda.

Jadi $\binom{n}{r}$ menyatakan banyaknya grup r benda yang berbeda yang dapat diambil dari sejumlah n benda bila urutan pengambilannya tidak diperhatikan.

Contoh 1.11

Sebuah panitia 3 orang hendak dibentuk dari sejumlah 20 orang. Berapa banyak panitia yang bisa dibentuk?

Penyelesaian:

Ada sebanyak $\binom{20}{3} = \frac{20x19x18}{3x2x1} = 1140$ panitia yang mungkin dibentuk.

Contoh 1.12

Dari suatu grup 5 laki-laki dan 7 perempuan, berapa banyak grup 5 orang bisa dibentuk yang terdiri atas 2 laki-laki dan 3 perempuan?

Penyelesaian:

Karena ada $\binom{5}{2}$ cara untuk memilih 2 laki-laki dan $\binom{7}{3}$ cara untuk memilih 3 perempuan, maka semuanya ada:

$$\binom{5}{2}\binom{7}{3} = \frac{5x4x7x6x5}{2x1x3x2x1} = 350$$

Grup yang terdiri atas 2 laki-laki dan 3 perempuan.

Sebuah identitas kombinatorial yang berguna ialah:

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \quad 1 \leq r \leq n$$

Persamaan (1.1) dapat dibuktikan secara analitis ataupun melalui argumentasi kombintorial berikut ini. Misalkan kita mempunyai sebuah grup n benda dan pusatkan perhatian pada salah satu benda tersebut yang mana saja namakan benda nomor 1. Sekarang ada $\binom{n-1}{r-1}$ kombinasi berukuran r yang mengandung benda nomor 1 (karena kombinasi demikian ini dibentuk melalui pengambilan r-1 dari n-1 benda sisanya).

Selain itu, ada $\binom{n-1}{r}$ kombinasi berukuran r yang tidak mengandung benda nomor 1. Karena semuanya ada $\binom{n}{r}$ kombinasi yang berukuran r, maka terbuktilah persamaan (1.1).

Nilai $\binom{n}{r}$ sering dinamakan koefisien binom karena peranannya yang penting didalam teorema binom.

Teorema Binom

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Akan diberikan dua bukti untuk teorema binom ini. Yang pertama ialah bukti melalui induksi matematis, sedangkan yang kedua ialah bukti melalui argumentasi kombinasi.

Bukti Teorema Binom Melalui Induksi Bila n = 1, Persamaan (1.2) akan tereduksi menjadi:

$$(x + y) = \binom{1}{0} x^0 y^1 + \binom{1}{1} x^1 y0 \ = x + y$$

Anggaplah Persamaan (1.2) benar untuk n-1. Selanjutnya

$$(x + y)^n \qquad = (x + y)(x + y)^{n\text{-}1}$$

$$= (x + y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k} x^{k+1} y^{n-1-k} \ + \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k}$$

Dengan mengambil i = k + 1 dalam jumlah yang pertama dan i=k didalam jumlah yang kedua maka kita memperoleh:

$$(x + y)^n \qquad = \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} x^i y^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n-1}{i} x^i y^{n-i}$$

$$= \ x^n + \sum_{i=1}^{n} \left[\binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i} \right] x^i y^{n-i} + y^n$$

$$= \ x^n + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} + y^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

Dalam hal ini persamaan sebelum persamaan terakhir diatas merupakan akibat dari Persamaan (1.1). Jadi, terbuktilah teorema diatas melalui induksi.

Bukti Kombinatorial Bagi Teorema Binom:

Perhatikan hasil kali.

$(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) \ (x_n + y_n)$

Hasil kali ini merupakan jumlah dari 2^n suku, yang setiap sukunya merupakan hasil kali dari n faktor. Selain itu, setiap suku ini mempunyai x_1 atau y_i sebagai faktornya untuk setiap i = 1, 2, ..., n. Sebagai missal,

$(x_1+y_1)\ (x_2+y_2) = x_1x_2+y_ly_2 + y_lx_2 + y_ly_2$

Sekarang, berapa banyak diantara 2^n suku ini yang mempunyai k buah x_1 dan n-k buah y_i sebagai faktornya? Karena setiap suku yang terdiri atas k buah dan x_i dan (n-k) buah y_i berpadanan dengan pemilihan suatu grup k unsur dan n buah nilai x_1, x_2...., x_n, maka ada $\binom{n}{k}$ buah suku yang demikian ini.

Jadi, dengan mengambil $x_i = x$ dan $y_i = y$, i = 1, 2, ... n, maka diperoleh:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Contoh 1.13

Uraikan $(x+y)^3$

Penyelesaian :

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^0y^3 + \binom{3}{1}x^1y^2 + \binom{3}{2}x^2y + \binom{3}{3}x^3y^0$$

$$= y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + x^3$$

Contoh 1.4

Berapa banyak himpunan bagian yang dapat dibentuk dari suatu himpunan n unsur?

Penyelesaian:

Karena ada $\binom{n}{k}$ himpunan-himpunan berukuran k, maka jawabannya ialah:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+2)^n = 2^n$$

Hasil ini juga dapat diperoleh dengan cara berikut. Kepada setiap unsur didalam himpunan ini berikan angka 0 atau 1. Untuk setiap cara pemerian bilangan, kita dapat memadankannya secara satu-satu dengan himpunan bagian yang terdiri atas semua unsur yang bernomor 1. Karena ada sebanyak 2^n cara pemberian bilangan demikian ini, maka begitu pula dengan banyaknya himpunan bagian padanannya.

Perhatikan bahwa kita telah menyertakan sebagai himpunan bagian himpunan yang tidak mempunyai unsur (himpunan kosong).

Jadi, banyaknya himpunan bagian yang mengandung sedikitnya satu unsur ialah 2^n - 1.

1.5 Koefisien Multinom

Didalam pasal ini kita simak masalah berikut. Suatu himpunan n unsur yang berbeda hendak dibagi menjadi r grup yang berbeda, masing-masing berukuran n_1, n_2,...... n_r dengan $\sum_{i=1}^{r} ni = n$.

Berapa banyak cara pembagian yang dapat dilakukan? Untuk menjawab ini, kita telah mengetahui bahwa ada $\binom{n}{n_1}$ cara untuk grup pertama; untuk setiap pilihan grup pertama ada $\binom{n-n_1}{n_2}$ cara untuk grup kedua, untuk setiap pilihan kedua grup itu ada $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ cara untuk grup ketiga, dan begitu seterusnya. Oleh karenanya, berdasarkan versi umum prinsip pencacahan dasar diperoleh ada:

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\ldots\binom{n-n_1-n_2-\ldots-n_r-1}{n_r}$$

$$= \frac{n! \qquad (n-n_1)!}{(n-n_1)!n_1!(n-n_1-n_2)!n_2!}\ldots\ldots=$$

$$\frac{n-n_1-n_2-\ldots n_r-1)!}{0!n_r!} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}$$

Cara yang mungkin

Notasi

Jika $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$ kita definisikan

$$(n_1, n_2^n, \ldots, n_r) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}$$

Jadi (n_1, n_2^n,...., n_r) menyatakan banyaknya cara membagi n benda yang berbeda menjadi r grup yang berbeda yang masing-masing berukuran n_1, n_2 ..., n_r.

Contoh 1.15

Sebuah kantor polisi di suatu kota kecil mempunyai 10 petugas. Jika 5 petugas harus melakukan patroli jalan raya, 2 petugas mengerjakan administrasi, dan 3 petugas lagi bersiaga di kantor, berapa banyak cara pembagian 10 petugas itu menjadi 3 grup yang bisa dilakukan?

Penyelesaian:

Ada $\frac{10!}{5!2!3!}$ = 2520 cara pembagian.

Contoh 1.16

Ada 10 anak laki-laki yang akan dibagi menjadi dua: tim A dan tim B, masing-masing beranggotakan 5 anak. Tim A akan main di salah satu kompetisi dan tim B di liga kompetisi yang lain. Ada berapa banyak cara pembagian yang bisa dilakukan?

Penyelesaian:

Ada $\frac{10!}{5!5!}$ = 252 cara pembagian.

Contoh 1.17

Agar bisa bermain bola basket, 10 anak laki-laki membagi diri mereka menjadi dua regu masing-masing 5 anak. Berapa banyak pembagian yang bisa mereka lakukan?

Penyelesaian:

Perhatikan bahwa contoh ini berbeda dengan contoh sebelumnya karena sekarang urutan kedua regu tidak perlu diperhatikan. Artinya disini tidak ada tim A dan tim B, namun yang ada hanyalah pembagian menjadi 2 regu masing-masing 5 anak.

Jadi jawaban yang diinginkan ialah:

$$\frac{10!/5!5!}{2!} = 126$$

Bukti teorema berikut ini, yang merupakan perluasan teorema binom, disediakan sebagai latihan.

Teorema Multinom

$$\left(x_1 + x_2 .... + x_r)n = \sum_{(n_1,...n_r} (n_1 n_2^n .... n_r) \right) x_1^{n1} x_2^{n2} .... x_r^{nr}$$

Penjumlahan ini dilakukan untuk semua vector bernilai bulat tak negatif (n_1, n_2...., n_r) sedemikian rupa sehingga $n_1 + n_2 + ... + n_r = n$

Bilangan (n_1, n_2^n,...., n_r) dinamakan koefisien-koefisien multinom.

Contoh 1.18

$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = (2, \genfrac{}{}{0pt}{}{2}{0}, 0)\ x_1^2\, x_2^0\, x_3^0 + (0, \genfrac{}{}{0pt}{}{2}{2}, 0)\ x_1^2\, x_2^2\, x_3^0 + (0,$

$\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{2}, 0)\ x_1^2\, x_2^0\, x_3^0 + (1, \genfrac{}{}{0pt}{}{2}{1}, 0)$

$x_1^2\, x_2^2\, x_3^0 + (1, \genfrac{}{}{0pt}{}{2}{0}, 1)\ x_1^1\, x_2^0\, x_3^1 + (0, \genfrac{}{}{0pt}{}{2}{1}, 1)\ x_1^0\, x_2^1\, x_3^1$

$= x_1^1 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

1.6 Tentang Pembagian Kelereng di Dalam Kantung

Ada r^n cara untuk memsukkan n kelereng yang berbeda ke dalam r kantung yang berbeda. Ini disebabkan setiap kelereng dapat dimasukkan kedalam salah satu yang mana saja dari r kantung tersebut. Sekarang misalkan banyak n kelereng tadi tidak terbedakan satu sama lain. Sekarang ada berapa banyak cara yang mungkin dilakukan? Karena kelereng-kelerengnya tidak terbedakan, maka hasil memasukkan n kelereng ke dalam r kantung dapat dinyatakan sebagai suatu vector $(x_1, x_2, \ldots., x_r)$, dalam hal ini x_1 adalah banyaknya kelereng yang dimasukkan ke dalam kantung ke-i. Jadi, masalahnya tereduksi menjadi pencarian banyaknya vektor bernilai-bulat tak negatif $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ sedemikian rupa sehingga:

$x_1 + x_2 + \ldots. + x_r = n$

Hal ini dinyatakan didalam proposisi berikut

Proposisi 1.1

Ada sebanyak $\binom{n+r-1}{n}$ vektor bernilai bulat tak negatif (x_1, x_2, ..., x_r)

Yang memenuhi x_1, x_2, ... x_1 = n. (1.3)

BUKTI:

Perhatikan suatu vektor yang terdiri atas n satu dan (r-1) nol. Untuk setiap permutasi vektor ini kita padankan satu solusi bagi persamaan 1.3, yaitu x_1 adalah banyaknya angka satu disebelah kiri angka nol pertama, x_2 adalah banyaknya angka satu antara nol pertama dan nol kedua, x_3 adalah banyaknya angka satu antara nol kedua dan nol ketiga, dan begitu seterusnya sampai x_1 adalah banyaknya angka satu di sebelah kanan nol yang terakhir. Sebagai missal, jika n = 6, r = 4, maka vektor (1,1,0,0,1,1,1,0,1) merupakan padanan solusi x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 3, x_4 = 1. Jelas bahwa perpadanan antara permutasi vektor n satu dan (r-l) nol dengan solusi persamaan 1.3 adalah suatu perpadanan satu-satu. Dengan demikian terbuktilah proposisi diatas sebab ada (n+r-1)! / n! (r-1)! Permutasi dari suatu vektor n satu dan (n-1) nol.

Contoh 1.19

Berapa banyaknya solusi bernilai-bulat tak negatif bagi persamaan $x_1 + x_2 = 37$.

Penyelesaian:

Ada $\binom{3+2-1}{3}$ solusi, yaitu (0,3), (1,2), (2,1), (3,0).

Contoh 1.20

Berapa banyaknya solusi bernilai bulat tak negatif bagi persamaan $x_1 + x_2 + x_3 = 5$?

Penyelesaian:

Ada $\binom{5+3-1}{5}$ = 21 solusi

Contoh 1.21

Berapa banyaknya suku didalam penguraian multinom $(x_1 + x_2 + ... + x_r)^n$?

Penyelesaian:

$$(x_1 + x_2 + ... + x_r)^n = \sum \binom{n}{n_1 ..... n_r} x_1^{n_1} ...... x_1^{n_r}$$

Dalam hal ini penjumlahannya untuk semua vektor bernilai bulat tak negatif (n_1, n_r) sedemikian rupa sehingga $n_1 + ... + n_r = n$.

Jadi, berdasarkan proposisi 1.1 ada sebanyak $\binom{n+r-1}{n}$ suku

Soal Latihan Teoretis

1. Buktikan versi umum prinsip dasar pencacahan
2. Dua percobaan akan dilakukan. Yang pertama mempunyai m kemungkinan hasil percobaan. Bila percobaan pertama memunculkan hasil percobaan nomor i, maka percobaan kedua mempunyai n_i

kemungkinan hasil percobaan, i = 1, 2, …m. Berapa banyaknya kemungkinan hasil percobaan dari kedua percobaan itu?

3. Berapa banyak cara mengambil r dari sejumlah n benda bila urutan pengambilannya diperhatikan?

4. Berikan banyak cara mengambil r benda dari sejumlah n bila urutan pengambilannya diperhatikan?

5. Ada $\binom{n}{r}$ permutasi dari n kelereng yang r diantaranya hitam dan n-r lainnya putih. Berikan penjelasan kombinatoris bagi kenyataan ini.

6. Berikan bukti analisis matematis bagi Persamaan (1.1).

7. Buktikan bahwa

   $$\binom{n+m}{r} = \binom{n}{0}\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \ldots\ldots + \binom{n}{r}\binom{m}{0}$$

   Petunjuk:

   Perhatikan suatu grup *n* laki-laki dan *n* perempuan. Berapa banyak grup berukuran *r* yang bisa dibentuk?

8. Berikan penjelasan yang bersifat kombinasi mengapa $\binom{n}{r} = \binom{n}{r, n-r}$

9. Berikan Argumentasi bahwa

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots .. n_r} = \binom{n-1}{n_1 - n_2, \ldots .. n_r} + \binom{n-1}{n_1, n_2 - 1, \ldots .. n_r} +$$
$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots .. n_r - 1}$$

10. Buktikan teorama multinom.

11. Buktikan bahwa ada sebanyak $\binom{n-1}{r-r}$ solusi bernilai bulat bagi persamaan.

    $x_2 + x_2 + \ldots.. + x_r = n$

12. Berapa banyak cara kita dapat memasukkan *n* kelereng yang tidak terbedakan ke dalam *r* kantung sedemikian rupa sehingga kantung ke-I berisi sedikitnya m_1 kelerang. Asumsikan bahwa

    $$n \supseteq \sum_{i=1}^{r} m_1$$

    JAWAB : $\binom{n - \sum m_1 + r - 1}{n - \sum m_1}$

13. Tunjukan bahwa

    $$\binom{n - + r - 1}{n} = \sum_{i=10}^{n} \binom{n - + r - 2}{n - 1}$$

    PETUNJUK: Gunakan Proposisi 1.21

14. Buktikan bahwa tepat ada sebanyak $\binom{r}{k}\binom{n-1}{n-r-k}$ solusi bagi persamaan $x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_1 = n$ sedemikian rupa sehingga tepat *k* buah x_1 di antaranya sama dengan 0.

15. Perhatikan suatu fungsi f (x_1, x_2,....., x_n) dan n peubah. Berapa banyak turunan parsial ordo r yang berbeda yang bisa dibentuk?

16. Gunakan Soal Latihan Teorits 7 untuk membuktikan bahwa

$$\binom{2n}{n} = \sum_{i=10}^{n} \binom{n}{n}^2$$

17. Dengan menggunakan induksi matematis dan identitas kombinasi

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n-1}{r-1}$$

Buktikan identitas berikut ini :

$$\binom{r+M}{r} = \sum_{j=10}^{r} \binom{M-1+j}{j}$$

Jawab:

Untuk bukti yang bersifat kombinasi, perhatikan sebuah grup $M + r$ orang, dinomori 1 sampai $M + r$, dan misalkan sejumlah r orang akan diambil dari group ini. Definisikan N sebagai nilai terbesar sedemikian rupa sehingga orang 1,2...., N terambil namun orang N terambil namun orang N akan sama dengan 1 bila orang 1 terambil tapi orang 2 tidak, dan seterusnya. Banyaknya cara memilih sedemikian rupa sehingga N = i jelas sama dengan banyak banyaknya cara mengambil r-i orang dan orang-orang yang bernomor i+2, i+3, ... r +M. Oleh karenanya ada $\binom{M+r-i-1}{\mathrm{r}-\mathrm{i}}$ cara sedemikian rupa sehingga N=i. Jadi, banyaknya cara mengambil r orang dan suatu grup M + r, yaitu $\binom{r+M}{r}$ cara, harus memenuhi persamaan;

$$\binom{r+M}{r} = \sum_{i=0}^{r} \binom{M+r-i-1}{\mathrm{r}-\mathrm{i}}$$

Bila kita ambil j = r - 1 didalam persamaan terakhir ini, kita akan memperoleh identitas yang diminta.

18. Tunjukkan bahwa

$$\sum_{i=0}^{r} (-1)^{n-1} \binom{n}{i} = 0$$

Soal Latihan

1. (a) Berapa banyaknya kemungkinan plat nomor kendaraan bermotor yang terdiri atas 7 karakter bila dua karakter yang pertama untuk huruf dan 5 karakter berikutnya untuk angka?

   (b) ulangi butir (a) bila huruf atau angka itu tidak boleh ada yang diulang.

2. Arif, Kei, Yayan, dan Eki membentuk sebuah band dengan 4 alat musik. Jika setiap anak bisa memainkan semua alat musik itu, berapa banyak susunan yang bisa dibentuk? Bagaimana bila Arif dan Eki bisa memainkan semua alat musik itu, tetapi Kei dan Yayan masing-masing hanya bisa main piano dan drum?

3. Jika 4 orang Jawa, 3 orang Sunda, dan 3 orang Batak duduk dalam satu baris, berapa banyak kemungkinan susunan duduk bila orang sesuku harus duduk berdampingan?

4. (a) Berapa banyak susunan bisa dibentuk bila 3 anak laki-laki dan 3 anak perempuan duduk dalam satu baris?

   (b) Berapa banyak susunan bisa dibentuk bila 3 anak laki-laki dan 3 anak perempuan duduk dalam satu baris dan bila yang sejenis kelamin harus duduk berdampingan?

   (c) Berapa banyak susunan bila anak perempuan harus duduk berdampingan?

   (d) Berapa banyak susunannya bila anak laki-laki dan perempuan harus duduk bersseling-seling?

5. Berapa banyak susunan huruf dapat dibentuk dari kata

   (a) STATISTIKA (b) BOGOR (c) PERTANIAN (d) PELUANG

6. Seorang anak mempunyai mainan balok-balokan. Enam diantaranya berwarna hitam, 4 merah, putih, dan 1 biru. Bila balok-balokan ini disusun dalam satu barisan, berapa banyak susunan yang bisa dibentuk?

7. Dari seperangkat kartu brij diambil 5 kartu. Berapa banyak kemungkinan yang bisa terjadi?

8. Sebuah komisi 7 orang, yang terdiri atas 2 dari PDI, 2 dari PPP, dan 3 dari Golkar, akan dibentuk dari 4 anggota PDI, 5 anggota PPP, dan 6 anggota Golkar.

Berapa banyak kemungkinan komisi yang bisa dibentuk?

9. Setiap siswa harus menjawab 7 dari 10 pertanyaan yang diajukan. Berapa banyak pilihan yang tersedia bagi setiap siswa? Berapa banyak pilihan yang tersedia bila setidaknya setiap siswa harus menjawab 3 dari 5 pertanyaan pertama?

10. Seorang ibu mempunyai 8 sahabat, dan 5 diantaranya akan diundangnya ke pesta kecil yang akan diadakannya. Berapa banyak pilihannya bila 2 diantaranya saling bermusuhan sehingga tidak mungkin hadir bersamaan? Berapa banyak pilihannya bila 2 diantaranya harus hadir bersamaan?

11. Sebuah laboratorium psikologi yang sedang meneliti tentang mimpi mempunyai 3 kamar, dengan 2 tempat tidur dalam masing-masing kamar. Bila 3 pasang kembar identik akan ditempatkan sehingga setiap pasang berada dalam satu kamar namun dengan tempat tidur yang berbeda, berapa banyak susunan yang mungkin?

12. Uraikan $(3x^2 + y)^2$

13. Permainan brij dimainkan oleh 4 orang, dan setiap pemain memperoleh 13 kartu. Berapa banyak kemungkinan pembagian yang bisa dilakukan?

14. Uraikan $(x_1 + 2x_2 + 3x_3)^4$

15. Bila 12 orang hendak dibagi menjadi 3 panitia yang masing-masing beranggotakan 3, 4, dan 5 orang, berapa banyak pembagian yang bisa dilakukan?

16. Berapa banyak cara pembagian yang bisa dilakukan seorang ayah yang ingin membagi 7 bungkusan hadiah kepada 3 anaknya bila si sulung akan menerima 3 bungkusan dan yang lain masing-masing 2 bungkusan.

17. Bila 8 papan tulis akan dikirim ke 4 sekolah, berapa banyak pembagian yang bisa dilakukan? Pertanyaan yang sama namun kali ini dengan syarat setiap sekolah harus menerima sedikitnya 1 papan tulis.

18. Bila 8 guru hendak ditempatkan di 4 sekolah, berapa banyak cara penempatan yang bisa dilakukan? Bagaimana bila setiap sekolah harus menerima 2 guru?

19. Sebuah lif berangkat dari lantai 1 dengan muatan 8 orang di sebuah gedung berlantai 6.

    (a) Dalam berapa banyak cara penumpang-penumpang itu bisa meninggalkan lif?

    (b) Pertanyaan yang sama namun bagaimana bila penumpang-penumpang itu tidak dibedakan (hanya diperhatikan berapa orang keluar dari lantai berapa)?

    (c) Seandainya 8 orang itu terdiri atas 5 laki-laki dan 3 perempuan, dan kita hanya memperhatikan jenis kelaminnya saja, jawablah butir (a)

20. Di dalam sebuah pelelangan dilelang 4 lukisan Dali, 5 Van Gogh, dan 6 Picasso dan ada 5 kolektor seni yang hadir. Salah seorang petugas mencatat banyaknya lukisan Dali, Van Gogh, dan Picasso yang

dibeli oleh masing-masing kolektor tersebut. Berapa banyaknya hasil catatan yang mungkin bila semua lukisan itu habis terjual?

21. Sepuluh liter terlibat dalam suatu persaingan sengit memperebutkan juara nomor satu. Di antara kesepuluh liter itu 3 dari Indonesia, 4 dari Thailand, 2 dari Malaysia, dan 1 dari Burma. Bila di papan skor hanya dicantumkan negara asal para peserta, berapa banyak kemungkinan hasil yang mungkin terjadi? Berapa banyak di antara kemungkinan hasil itu jika satu liter Indonesia berada di posisi tiga teratas dan dua lainnya di posisi lima terbawah.

22. Sepuluh orang ketua delegasi dari 10 negara termasuk Indonesia, Jepang, Australia, dan Cina duduk dalam formasi satu baris. Berapa banyak formasi yang mungkin dibentuk bila ketua delegasi Jepang dan Australia duduk berdampingan, sedangkan ketua delegasi Indonesia dan Cina tidak mau duduk berdampingan?

Bab 2
Aksioma Peluang

2.1 Pendahuluan

Di dalam bab ini pertama-tama kita akan berkenalan dengan gagasan suatu kejadian dan kemudahan kita akan menunjukan bagaimana cara menghitung peluang tersebut untuk situasi tertentu. Namun sebelumnya kita membutuhkan gagasan ruang contoh dan kejadian suatu percobaan.

2.2 Ruang Contoh dan Kejadian

Perhatikan suatu percobaan yang hasil percobaannya tidak dapat diramalkan dengan pasti sebelumnya. Akan tetapi, meskipun belum diketahui hasilnya lebih dulu dengan pasti, misalkan himpunan semua hasil percobaan yang mungkin terjadi telah diketahui. Himpunan semua hasil percobaan suatu percobaan ini dinamakan ruang contoh (*sample space*) dan dilambangkan dengan S. Beberapa contoh akan diberikan dibawah ini:

1. Bila percobaannyan berupa pelemparan sekeping uang logam, maka

   S = {G,A}

   dengan M melembangkan bahwa hasil percobaannya ialah sisi gambar, sedangkan B bahwa hasil percobaannya ialah sisi angka.

2. Bila percobaan berupa pengguliran sebuah dadu, maka ruang contohnya ialah

   S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

   dengan hasil percobaan *I* bermakna bahwa *I* muncul pada dadu tersebut,

   I = 1, 2, 3, 4, 5,6.

3. Bila percobaannya berupa pelemparan dua keeping uang logam, maka ruang contohnya terdiri atas empat titik.

   S {(G, G), (G, A), (A, C), (A, A)}

   Hasil-percobaannya akan dilambangkan (G, G) bila kedua uang logam muncul sisi gambar, (G, A) bila uang perama muncul sisi gambar dan uang kedua sisi angka, (A, G) bila uang pertama muncul sisi angka dan uang yang kedua sisi gambar, (A, A) bila kedua uang muncul sisi angka.

4. Bila percobaannya berupa pengguliran dua dadu, maka ruang contohnya terdiri atas 36 titik

   S = {(*I*, *j*), *I*, *j* = 1,2,3,4,5,6}

   Dalam hal (1,1) dikatakan terjadi bila *I* muncul pada pertama dan *j* muncul pada dadu kedua.

5. Jika percobaanya berupa pengukuran umur suatu transistor sejak digunakan sampai putus (dalam satuan jam), maka ruang contohnya terdiri atas semua bilangan nyata tidak negatif.

   $S = \{x : 0 \leq x \leq \infty\}$

Sembarangan himpunan bagian *E* dari ruang contoh *S* dinamakan *kejadian* (*event*). Beberapa contoh kejadian diberikan berikut ini.

1. Pada contoh 1, jika $E = \{G\}$, maka *E* ialah kejadian bahwa sisi gambar telah muncul pada pelemparan uang logam itu. Begitu pula, jika *E* = {A), maka *E* ialah kejadian bahwa sisi angka telah muncul.
2. Pada contoh 2, jika $E = \{2,4,6\}$, maka *E* berupa kejadian bahwa sisi genap telah muncul pada dadu tersebut.
3. Pada contoh 3, jika *E* {(G, G), (G, A)), maka *E* adalah kejadian munculnya sisi gambar pada uang logam pertama.
4. Pada contoh 4, jika *E* = {(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)), maka *E* a dalah kejadian bahwa jumlah kedua sisi muncul ialah 7.
5. Pada contoh 5, jika $E = \{x : 0 \leq x \leq 5\}$, maka *E* adalah kejadian bahwa transistor bersangkutan tidak berumur lebih dari 5 jam.

Untuk sembarang dua kejadian *E* dan *F* bagi suatu ruang contoh *S*, kita didefinisikan kejadian baru $E \cup F$ sebagai kejadian yang terdiri atas semua titik yang menjadi anggota *E* atau *F* atau keduanya. Dengan kata lain, kejadian $E \cup F$ terjadi jika kejadian E atau F atau keduanya terjadi sebagai missal, pada contoh 1 jika E atau F atau keduanya terjadi. Sebagai missal, pada contoh 1 jika $E = \{G\}$ dan $F = \{A\}$, maka

$$E \cup F = \{G, A\}$$

Dalam hal ini $E \cup F$ = sama dengan ruang contohnya. Pada contoh 2, jika kejadian $E = \{2, 4, 6\}$ dan $F = \{1, 2, 3)$, maka

$$E \cup F=\{1,2,3,4,6\}$$

Dalam hal ini $E \cup F$ akan terjadi jika sisi dadu yang muncul ialah 1 atau 2 atau 3 atau 4 atau 6. Kejadian $E \cup F$ dinamakan *gabungan* (*union*) kejadian E dan F, kita juga dapat mendefinisikan kejadian baru $E \cap F$, yang dinamakan *perpotongan* (*intersection*) E dan F, sebagai suatu kejadian yang terdiri atas semua titik yang menjadi anggota E dan F. Dengan kata lain, kejadian $E \cap F$ akan terjadi hanya jika E dan F keduanya terjadi sekaligus. Sebagai misal, pada contoh 2 jika $E = \{1,3,5\}$ dan $F \{1,2,3\}$, maka

$$E \cap F = \{1,3\}$$

Jadi $E \cap F$ akan terjadi jika satu sisi dadu yang muncul ialah 1 atau 3. Pada contoh 1, jika kejadian $E = \{G\}$ dan $F = \{A\}$, maka kejadian $E \cap F$ tidak mengandung satu titik pun, sehingga oleh karenanya kejadian kosong (*null event*) dan melambangkannya dengan ϕ (dengan kata lain ϕ adalah kejadian yang tidak mengandung satu titik pun). Jika $E \cap F = \phi$, maka E dan F dikatakan saling menyisihkan (*mutually exclusive*).

Kita juga mendefinisikan gabungan dan perpotongan lebih dari dua kejadian dengan cara serupa. Jika E_1, E_2, ... Adalah kejadian maka gabungan semua kejadian ini dilambangkan dengan $\bigcup_{e=1}^{\infty} E_n$, didefinisikan sebagai kejadian yang terdiri atas semua titik yang ada didalam E_n untuk sedikitnya satu nilai dan n = 1, 2, ... Begitu pula, perpotongan semua kejadian E_n, dilambangkan dengan $\bigcup_{e=1}^{\infty} E_n$, didefinisikan sebagai kejadian yang terdiri atas semua titik yang menjadi anggota semua kejadian E_n, n = 1, 2, ...

Terakhir untuk sembarang kejadian E, kita definisikan kejadian baru E^c, dinamakan komplemen E, sebagai kejadian yang terdiri atas semua titik di dalam ruang S yang bukan anggota E. Ini berarti E^c akan terjadi jika dan hanya jika E tidak terjadi. Pada contoh 4, jika kejadian E = (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1), maka E^c akan terjadi bila jumlah kedua sisi dadu yang muncul tidak sama dengan 7. Juga perhatikan bahwa karena percobaan pasti menghasilkan suatu hasil percobaan, maka $S^c = \phi$.

Untuk sembarang dan kejadian E dan F, jika semua titik anggota E juga menjadi anggota F, maka kita katakan bahwa E dikandung di dalam F dan kita tuliskan $E \subset F$ (atau $F \supset E$). Jadi, jika $E \subset F$, terjadi kejadian E berimplikasi bahwa kejadian F juga pasti terjadi. Jika $E \subset F$ dan $F \supset E$. maka kita katakan bahwa E sama dengan F dan kita tuliskan E = F.

Operasi gabungan, perpotongan dan komplemen beberapa kejadian mematuhi aturan-aturan tertentu berikut ini.

Hukum komutasi $E \cup F = F \cup E$ $E \cap F = F \cap E$

Hukum Asosiasi $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$ $(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$

Hukum penyebaran $(E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G)$ $(E \cap F) \cup G = (E \cup G) \cap (F \cup G)$

Hukum-hukum ini dapat dibuktikan dengan cara menunjukkan bahwa sembarang titik yang menjadi anggota kejadian diruas kiri juga menjadi anggota kejadian di ruas kanan, dan begitu pula sebaliknya.

Hubungan yang bermanfaat berikut ini antara kegiatan operasi dasar gabungan, perpotongan, dan komplemen dikenal sebagai hukum De-Morgan.

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_n \right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} E_i^c \text{ dan } \left(\bigcap_{i=1}^{n} E_n \right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} E_i^c$$

Untuk membuktikan hukum De-Morgan, pertama-tama misalkan bahwa x ialah sembarang titik di dalam $\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_n \right)^c$. Maka x bukan anggota $\bigcap_{i=1}^{n} E_i^c$, yang berarti bahwa x bukan anggota kejadian Ei, i = 1, 2, ... n, yang mana pun. Ini berimplikasi bahwa x adalah anggota E untuk semua i = 1, 2, ... n, sehingga ia pasti menjadi $\bigcap_{i=1}^{n} E_i^c$. Untuk pembuktian arah sebaliknya, misalkan bahwa x adalah sembarang titik anggota $\bigcap_{i=1}^{n} E_i^c$. Maka x pasti menjadi anggota E untuk semua i = l, 2, ... n, yang berarti bahwa x bukan anggota E yang mana pun untuk i = 1, 2, ... n. Ini berimplikasi bahwa x bukan anggota $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$. Jadi, haruslah x merupakan anggota $\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)^c$.

Terbuktilah hukum De-Morgan yang pertama.

Untuk membuktikan hukum DeMorgan yang kedua, kita gunakan hukum yang pertama untuk memperoleh

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} (E_i^c)^c$$

yang karena $(E^c)^c = E$, setara dengan

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} E_i$$

Dengan mengambil komplemen kedua ruas persamaan terakhir ini, maka kita peroleh :

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i^c = \left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right)^c$$

2.3 Aksioma Peluang

Salah satu cara mendefinisikan peluang suatu kejadian ialah mengucapkannya dalam frekuensi relatif terjadinya kejadian bersangkutan. Definisi demikian ini biasanya berbunyi demikian : Misalkan bahwa suatu percobaan dengan ruang contoh S diulang-ulang dibawah kondisi yang sama. Untuk setiap kejadian E yang merupakan himpunan bagian dari S. kita definisikan n(E) sebagai berapa kali kejadian E yang merupakan himpunan bagian dari S, kita definisikan n(E) sebagai berapa kali kejadian E terjadi selama n kali ulangan percobaan itu. Maka P(E), peluang kejadian E, didefinisikan sebagai :

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(E)}{n}$$

Dengan kata lain, P(E) didefinisikan sebagai persentase (pelimitan) berapa kali kejadian E terjadi. Jadi peluang kejadian E adalah frekuensi pelimitan kejadian E.

Walaupun definisi ini secara intuisi cukup memuaskan dan oleh karenanya harus selalu diingat oleh pembaca, namun ia memiliki kelemahan. Bagaimana kita tahu bahwa n(E)/n akan konvergen ke suatu nilai pelimitan tertentu yang selalu sama untuk setiap rangkaian ulangan percobaan yang mungkin dilakukan? Sebagai missal, andaikan percobaan yang akan diulang-ulang itu adalah pelemparan sekeping uang logam. Bagaimana kita tahu bahwa proporsi sisi gambar yang diperoleh dari n lemparan yang pertama akan konvergen ke suatu nilai tertentu bila n terus semakin besar? Selain itu, seandainya pun ia konvergen ke suatu nilai tertentu, bagaimana kita tahu bahwa kalau percobaan itu diulang-ulang untuk yang kedua kalinya, kita akan memperoleh proporsi pelimitan sisi gambar yang sama?

Pembela definisi peluang berdasarkan frekuensi relatif biasanya menjawab keberatan ini dengan mengatakan bahwa kekonvergenan n(E)/n ke suatu nilai pelimitan tertentu merupakan suatu asumasi, atau aksioma, system tersebut. Akan tetapi, mengasumsikan bahwa n(E)/n akan konvergen ke suatu nilai konstan tertentu tampaknya merupakan asumsi yang terlalu rumit. Sebab, walaupun kita berharap bahwa frekuensi pelimitan yang konstan demikian ini ada, namun secara apriori belum tampak jelas bahwa hal ini memang demikian. Apakah tidak lebih beralasan untuk mengasumsikan berlakunya seperangkat aksioma tentang peluang yang lebih sederhana dan nampak jelas, dan kemudian berusaha untuk membuktikan bahwa frekuensi pelimitan tadi memang ada? Pendekatan yang terakhir ini merupakan pendekatan aksiomatik yang modern terhadap teori peluang dan kita akan menggunakannya didalam buku ajar ini. Khususnya, kita akan mengasumsikan bahwa untuk setiap kejadian E di dalam ruang contoh S, ada suatu nilai P(E), yang dinamakan peluang E. kemudian kita akan mengasumsikan bahwa nilai-nilai peluang ini memenuhi seperangkat aksioma tertentu, yang semoga pembaca sepakat, sesuai dengan pemikiran initiative kita tentang peluang.

Perhatikan suatu percobaan yang ruang contohnya ialah S. untuk setiap kejadian E pada ruang contoh S ini, kita asumsikan ada suatu Bilangan P(E) yang memenuhi tiga aksioma berikut:

Aksioma 1

$0 \leq P(E) \leq 1$

Aksioma 2

$P(S) = 1$

Aksioma 3

Untuk sembarang kejadian-kejadian E_1, E_2=, ... yang saling menyisihkan, artinya $E_i \cap E_j = \phi$ untyuk $i \neq j$.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

P(E) kita namakan peluang kejadian E

Aksioma 1 menyatakan bahwa peluang hasil percobaan ini adalah suatu titik anggota E merupakan suatu bilangan antara 0 dan 1. Aksioma 2 menyatakan bahwa, dengan peluang 1, hasil percobaannya akan merupakan sebuah titik didalam ruang contoh S. Aksioma 3 menyatakan bahwa untuk sembarang rangkaian kejadian yang saling menyisihkan, peluang setidaknya salah satu dari kejadian itu terjadi sama dengan jumlah masing-masing kejadian tersebut.

Bila kita simak suatu barisan kejadian E_1, E_2, dengan E_1= S, Ei = $\varnothing$ untuk i > 1, maka, karena kejadian-kejadian itu saling menyisihkan S = $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, kita memperoleh dari Aksioma 3 bahwa:

$$P(S) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) = P(S) + \sum_{i=2}^{\infty} P(\phi)$$

yang selanjutnya berimplikasi

$P(\phi) = 0$

Jadi, kejadian kosong mempunyai peluang terjadi sama dengan 0.

Selain itu perlu dicatat bahwa untuk sembarang barisan kejadian E_1, E_2, …., E_n yang saling menyisihkan.

$$P\left(\bigcup_{i}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) \tag{2.1}$$

Ini dapat dibuktikan dari Aksioma 3 dengan cara mendefinisikan Ei sebagai kejadian kosong untuk semua nilai i yang lebih besar daripada n. Aksioma 3 setara dengan persamaan (2.1) bila ruang contohnya terhingga (*finite*). Akan tetapi Aksioma 3 yang lebih umum sifatnya diperlukan bila ruang contohnya terdiri atas tak hingga banyaknya titik.

Contoh 2.1

Bila percobaan kita berupa pelemparan sekeping uang logam dan bila kita mengasumsikan bahwa sisi gambar dan sisi angka berkemungkinan sama besar untuk muncul, maka kita memperoleh:

P({G}) = P({A}) = ½

Akan tetapi, bila uang logam yang digunakan tidak setimbang dan kita merasa bahwa sisi gambar berkemungkinan muncul dua kali dibandingkan dengan sisi angka, maka kita memperoleh :

P({G}) = 2/3 P({A}) 1/3

Contoh 2.2

Bila sebuah dadu digulirkan dan kita asumsikan bahwa Keenam sisinya berkemungkinan muncul sama besar, maka kita memperoleh (P{1}) = (P{2}) (P{3}) =

(P{4}) = (P{5}) = (P{6}) = 1/6. Dari Aksioma 3, peluang munculnya angka genap sama dengan P({2,4,6) = (P{2}) =(P{4}) =(P{6}) = ½

Asumsi adanya suatu fungsi himpunan P. yang didefinisikan pada kejadian-kejadian didalam suatu ruang contoh S dan yang memenuhi Aksioma-aksioma 1, 2, dan 3, merupakan suatu pendekatan matematis modern terhadap teori peluang. Semoga pembaca sepakat bahwa aksioma-aksioma itu sangat alamiah dan sesuai dengan gagasan intuitif kita tentang peluang dalam kaitannya dengan kemungkinan dan keacakan. Lebih jauh lagi, dengan menggunakan aksioma-aksioma itu kita akan dapat membuktikan bahwa jika suatu percobaan diulang-ulang terus-menerus, maka dengan peluang 1 proporsi keseringan sembarang kejadian tertentu E muncul akan sama dengan P(E). Hasil ini dikenal sebagai hukum kuat bilangan besar (*strong law of large number*), akan dibahas dalam Bab 8.

2.4 Beberapa Proporsi Sederhana

Di dalam pasal ini kita akan membuktikan beberapa proposisi sederhana tentang peluang pertama-tama kita perhatikan bahwa karena E dan E^c selalu saling menyisihkan dan karena $E \cup E^c = S$, maka berdasarkan Aksioma 2 dan 3 kita memperoleh bahwa :

$$1 = P(S) = P(E \cup Ec) = P(E) + P(Ec)$$

Pernyataan ini setara dengan Proposisi 2.1 berikut ini

Proposisi 2.1

$P(E^c) = 1 - P(E)$

Dalam kata-kata, Proposisi 2.1 mengatakan bahwa peluang suatu kejadian tidak akan terjadi sama dengan satu dikurangi peluang kejadian itu akan terjadi. Sebagai missal, bila peluang munculnya sisi gambar dalam suatu pelemparan uang logam ialah 3/g, peluang munculnya sisi angka pasti 5/8.

Proposisi kedua kita mengatakan bahwa jika kejadian E terkandung didalam kejadian F, maka peluang E tidak mungkin lebih besar daripada peluang F.

Proposisi 2.2

Jika $E \subset F$, maka $P(E) \leq P(F)$

BUKTI: Karena $E \subset F$, maka kita dapat mengucapkan F sebagai

$F = E \cup (E^c \cap F)$

Oleh karenanya, karena E dan $E \cap F$ saling menyisihkan, dari Aksioma 3 kita memperoleh bahwa:

$P(F) = P(E) + P(E^c \cap F)$

Yang membuktikan proposisi ini karena $P(E^c \cap F) \geq 0$

Proposisi 4.2 mengatakan kepada kita, misalnya, bahwa peluang munculnya angka 1 pada pengguliran sebuah dadu selalu lebih kecil atau sama dengan peluang munculnya angka ganjil.

Proposisi berikut ini menyatakan hubungan antara peluang gabungan dua kejadian yang diucapkan dalam peluang kejadian masing-masing dengan peluang perpotongan antara kedua kejadian tersebut.

Proposisi 2.3

$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap P)$

BUKTI Untuk memperoleh suatu rumus bagi $P(E \cup F)$, pertama-tama perhatikan bahwa $E \cup F$ dapat dituliskan sebagai gabungan dua kejadian E dan $E^c \cap F$. Selanjutnya dan Aksioma 3 kita peroleh bahwa:

$$P(\mathrm{E} \cup \mathrm{F}) = P[E \cup (E^c \cap F)]$$

$$= P(E) + P(E^c \cap F)]$$

Lebih lanjut, karena $F = (E \cap F) \cup (E^c \cap F)$ maka sekali lagi dari Aksioma 3 kita memperoleh:

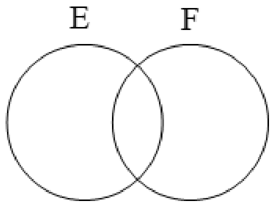
$P(F) = P(E \cap F) + P(\mathrm{E}^c \cap F)$

Atau

$P(E^c \cap F) = P(F) - P(E \cap F)$

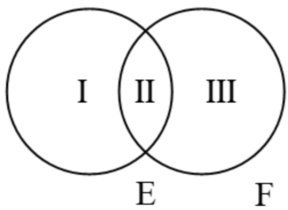
sehingga terbuktilah proposisi ini.

Proposisi 2.3 juga dapat dibuktikan dengan memanfaatkan diagram Venn. Gambar 2.1 menunjukkan sebuah diagram Venn. Lingkaran sebelah kiri dimaksudkan untuk mewakili kejadian E sedangkan lingkaran sebelah kanan untuk mewakili kejadian F. Jadi E terdiri atas titik-titik di lingkaran kiri dan F terdiri atas titik-titik di lingkaran kanan.



Gambar 2.1 Suatu diagram Venn

Sekarang diagram ini kita bagi menjadi tiga bagian yang saling menyisihkan seperti ditunjukkan dalam Gambar 2.2. Dalam kata-kata, Bagian I mewakili semua titik didalam E yang tidak ada di dalam F (yaitu $E \cap F^c$); Bagian II mewakili semua titik yang ada didalam E maupun F (yaitu $E \cap F$), dan Bagian III mewakili semua titik didalam F yang tidak ada didalam E (yaitu, $E^c \cap F$)



Gambar 2.2 Diagram Venn dengan tiga bagian daerahnya

Dari gambar 2.2 kita lihat bahwa:

$$E \cup F = I \cup II \cup III$$

$$= I \cup II$$

$$= II \cup III$$

Karena I, II, dan III saling menyisihkan, maka berdasarkan Aksioma 3 kita peroleh :

$P(E \cup F) = P(I) + P(II) + P(III)$, $P(E) = P(I) + P(II)$,dan

$P(F) = P(II) + F(III)$

yang berarti bahwa :

$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - \mathrm{P}(II)$

dan terbuktilah Proposisi 2.3 sebab II = E $\cap$ F

Contoh 2.3

Misalkan kita melempar dua uang logam dan misalkan bahwa masing-masing dari keempat titik di dalam ruang contoh S = {(G,G), (G,A), (A,G), (A,A)} berpeluang muncul yang sama, sehingga peluang masing-masing ialah ¼ misalkan:

E{(G,G), (G,A)} dan F{(G,G), (A,G)}

Dengan kata lain, E adalah kejadian bahwa uang pertama muncul gambar, sedangkan F adalah kejadian bahwa uang kedua muncul gambar.

Berdasarkan Proposisi 2.3, kita peroleh bahwa peluang uang pertama atau kedua muncul sisi gambar ialah:

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

$$= 1/2 + 1/2 - \mathrm{P}(\{(G,G)\}) = 1 - 1/2 = 3/4$$

Peluang ini tentu saja juga dapat dihitung secara langsung sebab :

$$P(E \cup F) = P(\{(G,G),(G,A),(A,G)\}) = 3/4$$

Kita juga dapat menghitung peluang terjadinya salah satu dari ketiga kejadian E atau F atau G

$P(E \cup F \cup G) = P[(E \cup F)G]$

yang menurut Proposisi 2.3 sama dengan

$P(E \cup F) + P(G) – P[(E \cup F) \cap G]$

Dari hukum penyebaran kita mengetahui bahwa kejadian $(E \cup F) \cap G$ setara dengan kejadian $(E \cap G) \cup (F \cap G)$, sehingga oleh karenanya kita memperoleh dari kedua persamaan sebelum ini bahwa

$P(E \cup F \cup G)$

$= P(E) + P(F) - P(E \cap F) + P(G) - P[E \cap G) \cup (F \cap G)]$

$= P(E) + P(F) - P(E \cap F) + P(G) - P(E \cap G) - P(F \cap G) + P(E \cap G \cap F \cap G)$

$= P(E) + P(F) + P(G) - P(E \cap F) - P(E \cap G) - P(F \cap G)$ $P(E \cap G \cap F \cap G)$

Lebih jauh lagi, proposisi berikut ini dapat dibuktikan melalui induksi matematis.

Proposisi 2.4

$P(E_1 \cup E_2 \cup .... \cup E_n)$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(Ei_1 Ei_2) + ... + (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < i_2 < ... < i_r} P(Ei_1 Ei_2 ... Ei_r)$$

$+ ....(-1)^{n+1} P(E_1 E_2 ... E_n)$

Penjumlahan $\sum_{i_1<i_2<...<i_r} P(Ei_1 Ei_2 ... Ei_r)$ dilakukan terhadap semua $\binom{n}{r}$ himpunan bagian dari himpunan (1, 2, …, n)

Dalam kata-kata Proposisi 2.4 mengatakan bahwa peluang gabungan n kejadian sama dengan jumlah peluang masing-masing kejadian itu dikurangi jumlah peluang semua perpotongan dua kejadian, ditambah jumlah peluang semua perpotongan tiga kejadian, dan seterusnya.

2.5 Ruang Contoh Dengan Hasil Percobaan Berpeluang Muncul Sama

Untuk sejumlah besar percobaan sangat wajar untuk mengasumsikan bahwa setiap titik didalam ruang contohnya berpeluang muncul sama besar. Perhatikan suatu percobaan dengan ruang contohnya S berupa suatu himpunan terhingga, katakanlah S {l,2...., N). Maka seringkali diasumsikan bahwa:

P({l)) = P({2}) = ... P({N})

Yang berdasarkan Aksioma 2 dan 3 berimplikasi (mengapa?) bahwa:

$P(\{i\}) = \frac{1}{N}$ i = 1, 2 …., N

Dengan demikian, berdasãrkan Aksioma 3 berlaku bahwa untuk sembarang kejadian E.

$$P(E) = \frac{\text{banyaknya titik didalam } E}{\text{banyaknya titik didalam } S}$$

Dalam kata-kata, jika kita mengasumsikan bahwa setiap hasil percobaan suatu percobaan berpeluang muncul sama, maka peluang sembarang kejadian E sama dengan proporsi titik didalam ruang contohnya yang berada didalam E.

Contoh 2.4

Jika dulu digulirkan, berapa peluang bahwa jumlah mata yang muncul sama dengan 7?

Penyelesaian : Kita akan memecahkan masalah ini dengan terlebih dulu mengasumsikan bahwa masing-masing dari 36 kemungkinan hasil percobaan berpeluang muncul sama. Karena ada 6 kemungkinan hasil percobaan yaitu (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1), yang menghasilkan jumlah mata 7, maka peluang yang dicari ialah $\frac{5}{6} = \frac{1}{6}$

Contoh 2.5

Dua kelereng "diambil secara acak" dari sebuah kantung yang berisi 6 kelereng putih dan 5 kelereng hitam, berapa peluang bahwa kedua kelereng yang terambil itu yang satu putih dan yang lain hitam?

Penyelesaian Bila kita memperhatikan urutan terambilnya kelereng, maka ruang contohnya terdiri atas 11 x 10 = 110 titik. Selanjutnya, ada 6x5 = 30 cara memperoleh kelereng pertama putih dan kelereng kedua hitam. Begitu pula ada 5x6 = 30 cara memperoleh kelereng pertama hitam dan kelereng kedua putih. Jadi, dengan mengasumsikan bahwa "pengambiln secara acak" berarti bahwa setiap titik dari 110 titik didalam ruang contoh itu berpeluang muncul sama, kita memperoleh peluang yang dicari, yaitu:

$$\frac{30+30}{110} = \frac{6}{11}$$

Masalah ini juga dapat dipecahkan dengan menganggap urutan terambilnya kelereng tidak diperhatikan. Dari sudut pandang ini, ruang contohnya berisi = $\binom{11}{2}$ = 55 titik. Tidak sukar untuk melihat bahwa semua hasil percobaan berpeluang muncul sama bila urutan terambilnya kelereng diperhatikan berimplikasi bahwa semua hasil percobaan juga berpeluang muncul sama bila urutan terambilnya kelereng tidak diperhatikan. Jadi, dengan menggunakan representasi demikian ini kita peroleh peluang yang dicari, yaitu :

$$\frac{\binom{6}{1}\binom{5}{1}}{\binom{11}{2}} = \frac{6}{11}$$

yang ternyata juga sama dengan jawaban sebelumnya.

Contoh 2.6

Sebuah panitia 5 orang akan dipilih dari suatu grup 6 laki-laki dan 9 perempuan. Bila pemilihnya secara acak, berupa peluang panitia yang terbentuk terdiri atas 3 laki-laki dan 2 perempuan?

Penyelesaian:

Marilah kita asumsikan bahwa "pemilihan secara acak" bermakna bahwa masing-masing dari $\binom{15}{5}$ kombinasi yang mungkin berpeluang sama untuk terpilih, Oleh karenanya peluang yang dicari ialah:

$$\frac{\binom{6}{3}\binom{9}{2}}{\binom{15}{5}} = \frac{240}{1001}$$

Contoh 2.7

Sebuah tim American Football terdiri atas 20 pemain berkulit hitam dan 20 pemain berkulit putih. Pemain-pemain ini akan dipasangkan dua-dua sebab setiap kamar di asrama pemain hanya muat untuk 2 orang. Bila pemasangannya dilakukan secara acak, berapa peluang tidak ada pasangan hitam-putih? Berapa peluang ada 2i pasangan hitam putih, i = 1, 2….., 10?

Penyelesaian :

Ada $\binom{40}{2, 2, \ldots, 2} = \frac{40!}{(2!)^{20}}$

cara untuk membagi 40 pemain ke dalam 20 pasangan terturut. (Artinya ada $40!/20^{20}$ cara membagi pemain-pemain itu kedalam pasangan pertama, pasangan kedua, dan seterusnya) Oleh karena itu ada $40!/2^{20}(20)!$ Cara membagi semua pemain ini menjadi pasangan-pasangan tak terturut. Selanjutnya, karena suatu pembagian tidak akan menghasilkan pasangan hitam-putih bila semua pemain berkulit hitam (atau semua putih) dipasang-pasangkan diantara mereka sendiri, maka cara pembagian demikian ini ada sebanyak $[20!/20^{10}10!]^2$ cara. Dengan demikian, peluang tidak ada pasangan sekamar hitam-putih, namakan P_o, sama dengan

$$P_o = \frac{\left(\dfrac{20!}{2^{10}10!}\right)}{\dfrac{40!}{2^{20}20!}} = \left(\frac{20!}{(10!)^2 40!}\right)$$

Dengan menerapkan suatu hampiran yang berasal dari Stirling, yang mengatakan bahwa n! kira-kira sama $\sqrt{2\pi n^{n+1/2}e^{-n}}$, maka

$$P_o \approx \left(\frac{1}{2}\right)^{19.5}$$

Untuk menentukan P_{2i}, peluang bahwa ada 2i pasangan hitam-putih, pertama-tama kita catat bahwa ada $\binom{20}{2i}$ cara memilih 2i pemain berkulit putih dan 2i pemain berkulit hitam untuk dijadikan pasangan hitam putih. Pemain sebanyak 4i tadi kemudian dipasang pasangkan menjadi (2i)! kemungkinan pasangan hitam –

putih. (Hal ini disebabkan hitam yang pertama dapat dipasangkan dengan salah satu dari 2i-1 putih, hitam kedua dengan salah satu dari 2i-1 putih sisanya, dan begitu seterusnya) Karena 20-2i pemain berkulit putih (dan hitam) sisanya harus dipasang-pasangkan diantara mereka sendiri, maka ada

$$\binom{20}{2i}(2i)!\left[\frac{(20-2i)!}{2^{10-i}(10-i)!}\right]^2$$

cara pembagian yang menghasilkan 2i pasangan hitam putih. Jadi,

$$P_{2i} = \frac{\binom{20}{2i}(2i)!\left[\frac{(20-2i)!}{2^{10-i}(10-i)!}\right]^2}{\frac{(40)!}{2^{20}(20)!}} \quad i = 0, 1, \ldots, 10$$

Sebagai missal,

$$P_{20} = \frac{(20!)(20!)2^{20}}{(40)!}$$

$$= \frac{20!x10x38x36x....x4x2}{40!}$$

$$= \frac{20x19x18x...x3x2x1}{39x37x35x...x5x3x1}$$

$$= \frac{\sqrt{20\pi}}{2^{20}} \text{ (menurut hampiran Stirling)}$$

Contoh 2.8

Dalam permainan poker setiap pemain memperoleh 5 kartu. Bila ke-5 kartu ini nilainya berbeda berurutan dan tidak semuanya dari jenis (suit) yang sama, maka kita katakan pemain itu memperoleh straight. Sebagai misal, kartu-kartu yang terdiri atas lima spade, enam spade, tujuh spade, delapan spade. Dan sembilan hearts adalah suatu straight. Beberapa peluang seorang pemain tertentu memperoleh straight?

Penyelesaian:

Kita mulai dengan asumsi bahwa semua $\binom{52}{5}$ kombinasi 5 kartu berpeluang sama untuk dibagikan. Untuk menentukan banyaknya kombinasi yang terdiri atas kartu-kartu yang berupa straight, pertama-tama marilah kita hitung banyaknya kombinasi yang terdiri atas kartu-kartu as, dua, tiga, empat, dan lima (jenis kartu tidak relevan). Karena as itu tidak boleh salah satu dari keempat as yang ada, dan begitu pula dengan kartu-kartu dua, tiga, empat, dan lima, maka tepat ada 4^5 kombinasi yang menghasilkan kartu-kartu as, dua, tiga, empat, dan lima. Karena 4 diantara kombinasi ini ialah dari jenis yang sama (same suit, yang dinamakan straight flush), maka banyaknya straight yang terdiri atas kartu-kartu as, dua, tiga, empat, dan lima ialah $4^5 - 4$. Begitu pula, ada $4^5 - 4$ kemungkinan straight yang terdiri atas kartu-kartu sepuluh, jack, queen, king, dan as. Oleh karenanya, semuanya ada sebanyak $10\ (4^5 - 4)$ kemungkinan straight. Jadi, peluang yang terdiri ialah

$$\frac{10(4^5 - 4)}{\binom{52}{5}} \approx 0.0039$$

Contoh 2.9

Dalam permainan poker, lima kartu pegangan seorang pemain dinamakan *full house* jika terdiri atas 3 kartu yang bernilai sama dengan 2 kartu yang bernilai sama, misalnya 10 spade, 10 hearts, 10 clover, 5 hearts, dan 5 spade, dengan kata lain *full house* terdiri atas *three-of-a-kind* dan *a-pair*. Berapa peluang seorang pemain tertentu memperoleh *full house*?

Penyelesaian:

sekali lagi kita asumsikan bahwa semua $\binom{52}{5}$ kombinasi yang. mungkin berpeluang sama untuk muncul. Untuk menentukan banyaknya kemungkinan *full house*, pertama-tama perhatikan bahwa ada $\binom{4}{2}\binom{4}{3}$ kombinasi yang berbeda yang terdiri atas, misalnya, 2 kartu sepuluh dan 3 kartu jack. Karena ada 13 jenis pair yang berbeda, dan setelah terambil pair tertentu, ada 12 pilihan jenis *three-of-a-kind*, maka peluang diperoleh *full house* ialah:

$$\frac{(13)(12)\binom{4}{2}\binom{4}{3}}{\binom{52}{5}} \approx 0.0014$$

Contoh 2.10

Dalam permainan brij, seluruh 52 kartu dibagikan kepada 4 pemain. Berapa peluang salah seorang pemain tertentu, misalnya A, memperoleh 13 kartu spade?

Penyelesaian : Ada banyak $\binom{52}{13,13,13,13}$ cara membagikan 52 kartu diantara empat pemain. Karena ada $\binom{52}{13,13,13,13}$ cara pembagian yang menghasilkan seorang tertentu memperoleh semua kartu spade, maka peluang yang dicari ialah

$$\frac{4\binom{39}{13,13,13}}{\binom{52}{13,13,13,13}} \approx 6.3x10^{-12}$$

Sebuah dadu dikatakan setimbang atau takbias bila keenam sisinya berpeluang muncul sama. Begitu pula, sekeping uang logam dikatakan setimbang jika peluang muncul sisi gambar dan sisi angkanya sama.

Contoh 2.11

Sekeping uang logam setimbang dilemparkan 5 kali. Berapa peluang bahwa sisi gambar akan muncul sedikitnya sekali?

Penyelesaian : Peluang ini paling mudah dihitung dengan pertama-tama menghitung peluang komplemennya dan kemudian mengurangkannya dari 1. Artinya, mula-mula kita akan menghitung peluang bahwa sisi gambar tidak pernah muncul. Karena kejadian ini terjadi hanya dalam satu cara, yaitu (A,A,A,A,A), maka peluangnya ialah $\frac{1}{32}$. Jadi, peluang yang dicari ialah

$$1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

Contoh berikut ini mengilustrasikan suatu kenyataan bahwa hasil-hasil dalam peluang sering kali sangat mengherankan ketika pertama kali mengetahuinya.

Contoh 2.12

Bila n orang berada didalam sebuah ruangan, berapa peluang bahwa tidak ada dua orang diantaranya yang berhari ulang tahun sama?

Berapa besar n agar peluang ini lebih kecil dari $\frac{1}{2}$?

½

Penyelesaian : Karena setiap orang merayakan hari ulang tahunnya pada salah satu dari 365 hari, maka total ada $(365)^n$ mungkinan yang mungkin terjadi. (kita abaikan kemungkinan seseorang dilahirkan pada tanggal 29 Februari). Dengan mengasumsikan bahwa setiap kemungkinan itu berpeluang muncul sama, maka peluang yang dicari ialah (365) (364) (363) (365 - n + 1)/365^n. Bila n = 23, ternyata peluang ini lebih kecil dari ½, suatu hal mengherankan yang diluar perkiraan kita. Artinya bila di dalam suatu ruangan ada 23 orang, peluang bahwa sedikitnya dua orang diantara mereka berhari ulang tahun sama lebih besar dari ½. Banyak orang merasa tidak percaya akan hal ini. Yang mungkin lebih mengherankan lagi ialah bahwa peluang ini naik menjadi 0,970 bila didalam ruangan itu ada 50 orang. Dan dengan 100 orang didalam ruangan itu kemungkinannya lebih besar daripada 3.000.000 banding 1 [artinya peluangnya lebih besar daripada $(3x10^6)$ / $(3x10^6+1)$] bahwa sedikitnya dua orang berhari ulang tahun sama.

Contoh berikut ini tidak hanya mengandung sesuatu yang agak mengherankan, namun juga menarik dari segi teori.

Contoh 2.13

Masalah Pemadanan. Misalkan bahwa semua N orang yang hadir disebuah pesta melemparkan topinyä ke tengah ruangan. Topi-topi itu kemudian diacak dan lalu setiap orang mengambil sebuah topi secara acak.

1. Berapa peluang tidak seorangpun memperoleh kembali topinya?
2. Berapa peluang tepat k orang memperoleh kembali topinya?

Penyelesaian:

Pertanyaan (1) akan kita jawab dengan pertama-tama menghitung peluang komplemennya bahwa sedikitnya satu orang memperoleh kembali topinya. Kita akan melambangkan E1, i = 1, 2,..., N, kejadian bahwa orang ke-I memperoleh topinya. Sekarang menurut Proporsi 2.4, peluang bahwa sedikitnya satu orang memperoleh kembali topinya sama dengan

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} Ei\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{i_1<i_2} P(Ei_1 Ei_2) + \ldots$$

$$+(-1)^{r+1} \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_r} P(Ei_1 Ei_2 \ldots Ei_r) + \ldots .(-1)^{N+1} P(E_1 E_2 \ldots E_N)$$

Bila hasil percobaannya kita pandang sebagai suatu vektor N bilangan, dengan unsur ke-I ialah nomor topi yang terambil oleh orang ke-i, maka total ada N! kemungkinan hasil percobaan. [Misalnya, hasil percobaan (1,2, ……,N) berarti bahwa setiap orang memperoleh kembali topinya]. Selanjtnya, $Ei_1Ei_2\ldots Ei_n$, kejadian bahwa setiap orang dari n orang i_1, i_2,…i_n memperoleh kembali topinya, dapat terjadi dalam (N-n) [N-(n+1)] x 3x2x1 = (N-n)! cara; sebab diantara N-n orang sisanya, orang pertama dapat mengambil salah satu dari N-n topi, orang kedua dapat mengambil salah satu dari N-(n+1) topi, dan demikian seterusnya. Oleh karenanya, dengan mengasumsikan bahwa semua N! kemungkinan itu berpeluang sama untuk terjadi, maka

$$P(Ei_1 Ei_2 \ldots\ldots Ei_n) = \frac{(N-n)!}{N!}$$

Selain itu, karena ada $\binom{N}{n}$ suku didalam $\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_n} P(Ei_1 Ei_2 \ldots Ei_2)$, maka

$$\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_n} P(Ei_1 Ei_2 \ldots Ei_2) = \frac{N!(N-n)!}{(N-n)!n!N!} = \frac{1}{n!}$$

sehingga

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} Ei\right) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - .... + (-1)^{N+1}\frac{1}{N!}$$

Jadi, peluang bahwa tak seorangpun memperoleh kembali topinya ialah :

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - .... + \frac{(-1)^{N+k}}{N!}$$

untuk N cukup besar, kira-kira sama dengan e^{-1} = 0.3 6755. Dengan kata lain, untuk N cukup besar, peluang bahwa tidak seorangpun memperoleh kembali topinya kira-kira sama dengan 0.37. (Betapa banyak diantara pembaca yang salah mengira bahwa peluang ini akan menuju 1 untuk N $\rightarrow \infty$)

Untuk memperoleh peluang bahwa tepat k orang diantara N orang itu yang memperoleh kembali topinya, pertama-tama kita pusatkan perhatian pada sejumlah k orang tertentu. Banyaknya cara banyak k orang inilah yang berhasil memperoleh kembali topinya sama dengan banyaknya cara N-k orang lainnya yang mengambil topi diantara mereka sendiri tidak berhasil memperoleh kembali topinya. Namun karena

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - .... + \frac{(-1)^{N+k}}{N!}$$

ialah peluang bahwa tak seorang pun diantara N-k orang itu, yang mengambil topi diantara topi mereka sendiri, berhasil memperoleh kembali topinya, maka banyaknya cara k orang itu berhasil memperoleh kembali topinya ialah

$$(N-k)!\left[1-1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....+\frac{(-1)^{N-k}}{(N-k)!}\right]$$

Namun karena ada $\binom{N}{k}$ cara mengambil k orang diantara N orang, maka ada sebanyak

$$\binom{N}{k}(N-k)\left[1-1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}....+\frac{(-1)^{N-k}}{(N-k)!}\right]$$

cara tepat sembarang k orang diantara N orang tadi berhasil memperoleh kembali topinya. Jadi, peluang yang dicari ialah

$$\frac{\binom{N}{k}(N-k)!\left[1-1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....+\frac{(-1)^{N-k}}{(N-k)!}\right]}{N!} =$$

$$\frac{1-1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....\frac{(-1)^{N-k}}{(N-k)!}}{k!}$$

untuk N cukup besar kira-kira sama dengan $e^{-1}/k!$. nilai-nilai $e^{-1}k!$, k = 0,1,..... Mempunyai makna teoritis penting karena ia mempresentasikan nilai-nilai sebaran Poisson. Hal ini akan dikupas lebih jauh dalam Bab 4 nanti.

Untuk ilustrasi lain tentang kegunaan Proposisi 2.4, simaklah contoh berikut ini.

Contoh 2.14

Jika 10 pasangan suami-isteri mengambil tempat duduk secara acak di sekeliling sebuah meja bundar, hitunglah peluang bahwa tak seorang isteri pun duduk disamping suaminya.

Penyelesaian:

Jika E1, i = 1, 2, ..., 10 melambangkan kejadian bahwa pasangan ke-i duduk berdampingan, maka peluang yang dicari ialah

$$1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{10} Ei\right)$$

Sekarang menurut Proposisi 2.4

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} Ei\right) = \sum_{1}^{10} P(E_i) - .... + (-1)^{n+1} \sum_{i_1 < i_2 < ... < i_n} P(Ei_1 Ei_2 ... E_n) + ... - P(E_1 E_2 ... E_{10})$$

Untuk menghitung P(Ei$_1$, Ei$_2$...Ei$_n$) pertama-tama perhatikan bahwa ada 19! Cara menyusun 20 orang di sekeliling sebuah meja bundar (mengapa?). Banyaknya susunan yang menghasilkan n laki-laki duduk disamping isteri mereka paling mudah diperoleh dengan memandang setiap pasangan dari n pasangan itu sebagai satu kesatuan. Dalam hal demikian, maka kita perlu menyusun 20-2n+n=20-n satuan disekeliling sebuah meja bundar dan jelas susunan demikian ini ada sebanyak (20-n-i)! Susunan. Terakhir, karena masing-masing dari n pasangan itu dapat disusun dalam salah satu dari dua kemungkinan, maka semuanya ada 2^n(20-n-1)! Susunan yang menghasilkan n laki-laki duduk disamping isteri mereka masing-masing. Oleh karenanya,

$$P(E_{i_1}E_{i_2}\ldots E_{i_n}) = \frac{2^n(19-n)!}{19!}$$

Jadi, berdasarkan Proposisi 2.4, kita peroleh bahwa peluang sedikitnya sepasang suami isteri duduk berdampingan sama dengan

$$\binom{10}{1}2^1\frac{18!}{19!} - \binom{10}{2}2^2\frac{17!}{19!} - \binom{10}{3}2^3\frac{16!}{19!} - \ldots\ldots\binom{10}{10}2^{10}\frac{9!}{19!} -$$

2.6 Peluang adalah suatu Fungsi Himpunan yang Kontinu

Suatu barisan kejadian {En, n $\geq$ 1 } dinamakan barisan naik jika

$$E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \ldots$$

dan dinamakan barisan turun jika

$$E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_n \supset E_{n+1} \supset \ldots$$

Jika {E, n$\geq$1} adalah suatu barisan kejadian yang naik, maka kita definisikan suatu kejadian baru $\lim_{n\to\infty} E_n$ sebagai

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

biia $E_n \subset E_{n+1}$ untuk semua n. Begitu pula, jika {E_n, n>1} adalah suatu barisan kejadian turun, maka kita definisikan $\lim_{n\to\infty} E_n$ sebagai

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$$

bila $E_n \supset E_{n+1}$ untuk semua n.

Sekarang kita akan membuktikan Proposisi 2.6

Proposisi 2.6

Jika {E, n ≥ 1 } adalah suatu barisan kejadian yang naik atau yang turun, maka $\lim_{n\to\infty} P(E_n) = P \lim_{n\to\infty} E_n$

BUKTI:

Misalkan pertama-tama bahwa {E, n ≥1 } adalah suatu barisan naik definisikan kejadian-kejadian F_n, n ≥ 1 sebagai

$$F_n = E_n \left(\bigcup_{1}^{n-1} E_i \right)^c = E_n E_{n-1}^c n > 1$$

Dalam hal ini kita memanfaatkan kenyataan bahwa $\bigcup_{1}^{n-1} E_i = E_{n-1}$, karena kejadian-kejadian ini bersifat naik. Dalam kata-kata, F terdiri atas titik-titik didalam E_n yang tidak ada didalam Ei, i < n, sebelumnya. Tidak sukar untuk memverifikasi bahwa F adalah kejadian-kejadian yang saling menyisihkan sedemikian rupa sehingga

$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ dan $\bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ untuk semua n ≥ 1

Jadi

$P\left(\bigcup_{1}^{\infty} E_i\right) = P\left(\bigcup_{1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{1}^{\infty} P(Fi)$ (menurut Aksioma 3)

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n} P(Fi)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{1}^{\infty} F_i\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{1}^{\infty} E_i\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(E_n)$$

yang membuktikan proposisi di atas bila {En, n $\geq$ 1 } adalah barisan naik.

Jika {En, n $\geq$ 1) adalah suatu barisan naik, oleh karena itu, berdasarkan persamaan-persamaan sebelumnya.

$$P\left(\bigcup_{1}^{\infty} E_i^c\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_i^c)$$

Namun, karena $\bigcup_{1}^{\infty} E_i^c = \left(\bigcap_{1}^{\infty} E_i\right)^c$, maka kita peroleh bahwa

$$P\left(\left(\bigcap_{1}^{\infty} E_i\right)\right)^c = \lim_{n\to\infty} P(E_n^c)$$

$$1 - \mathrm{p}\left(\bigcap_{1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty}[1 - P(E_n)] = 1 - \lim_{n\to\infty} P(E_n^c)$$

atau

$$P\left(\bigcup_{1}^{\infty} E_i^c\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$$

Sehingga terbuktilah proposisi diatas.

Contoh 2.15

Sebuah Paradoks. Misalkan kita mempunyai sebuah kantung yang tak hingga besarnya dan sejumlah tak hingga kelereng yang dinomori 1, 2, 3, dan seterusnya. Perhatikan suatu percobaan yang dilakukan sebagai berikut. Pada 1 menit menjelang jam 12.00, kelereng 1 sampai 10 dimasukkan ke dalam kantung dan kelereng nomor 10 diambil lagi. (Andaikan bahwa pengambilan ini tidak memakan waktu sama sekali). Pada ½ menit menjelang jam 12.00, kelereng nomor 11 sampai 20 dimasukkan ke dalam kantung dan kelereng 30 diambil lagi. Pada 1/8 menjelang jam 12.00, dan seterusnya. Pertanyaan yang menarik ialah berapa banyak bola yang ada di dalam kantung pada tepat jam 12.00?

Jawaban terhadap pertanyaan ini ialah bahwa ada tak hingga banyaknya bola di dalam kantung pada jam 12.00, sebab semua bola yang nomornya tidak berbentuk 10n, n > 1, telah dimasukkan ke dalam kantung dan tidak diambil lagi sebelum jam 12.00. Jadi, masalah ini terpecahkan bila percobaannya dilaksanakan seperti diatas.

Akan tetapi, marilah kita ubah percobaan itu dan misalkan pada 1 menit menjelang 12.00, kelereng nomor 1 sampai 10 dimasukkan ke dalam kantung dan kelereng nomor 1 diambil lagi; pada ½ menit menjelang jam 12.00, kelereng nomor 11 sampai 20 dimasukkan ke dalam kantung dan kelereng nomor 2 diambil lagi; pada ¼ menit menjelang jam 12.00, kelereng nomor 21 sampai 30 dimasukkan ke dalam kantung dan kelereng 30 diambil lagi. Pada 1/8 menjelang jam 12.00, dan seterusnya. Pertanyaan yang menarik ialah berapa banyak bola yang ada di dalam kantung pada tepat jam 12.00?

Yang mengherankan ialah bahwa jawabannya kali ini ialah bahwa kantung itu telah kosong pada jam 12.00. Untuk mengetahui alsannya, perhatikan sembarang kelereng, katakanlah yang bernomor n. Suatu saat sebelum jam 12.00 [yaitu pada $(1/2)^{n-1}$ menit menjelang jam 12.00], kelereng ini telah diambil dari kantung. Jadi, untuk setiap n, kelereng nomor n sudah tidak didalam kantung pada jam 12.00; oleh karenanya, kantung itu pasti kosong pada jam tersebut.

Jadi, kita lihat dari bahasan di atas bahwa cara pengambilan kelereng telah membedakan hasilnya. Sebab, pada percobaan pertama, hanya kelereng-kelereng bernomor 10n, n > 1, yang dikeluarkan dari kantung; sedangkan pada percobaan kedua, semua kelereng pada akhirnya dikeluarkan dari kantung. Sekarang misalkan bahwa kelereng yang akan dikeluarkan diambil secara acak dan dalam kantung. Dengan kata lain, pada 1 menit menjelang jam 12.00, kelereng nomor 1 sampai 10 dimasukkan ke dalam kantung dan sebuah kélereng diambil secara acak untuk dikeluarkan, dan begitu seterusnya. Dalam hal demikian, berapa banyak kelereng yang ada didalam kantung pada tepat jam 12.00?

Penyelesaian Kita akan menunjukkan bahwa, dengan peluang 1, kantung itu kosong pada tepat jam 12.00. Marilah kita simak kelereng nomor 1. Definisikan E sebagai kejadian bahwa kelereng nomor 1 masih didalam kantung setelah n ambilan yang pertama telah dilakukan. Kiranya jelas bahwa:

$$P(E_n) = \frac{9x18x27x.....x(9n)}{10x19x28x....x(9n+1)}$$

[Untuk memahami persamaan ini, perhatikan bahwa jika kelereng nomor 1 masih harus didalam kantung setelah n ambilan, maka kelereng pertama yang terambil ialah salah satu dari 9, kelereng kedua ialah salah satu dari 18 (ada 19 kelereng didalam kantung pada saat ambilan kedua, salah satunya pasti kelereng nomor 1), dan begitu seterusnya. Penyebutnya diperoleh dengan cara serupa]

Sekarang kejadian bahwa kelereng nomor 1 masih ada didalam kantung pada tepat jam 12.00 tidak lain ialah kejadian $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_n$. Karena kejadian-kejadian E_n, n $\geq$ 1, adalah kejadian-kejadian yang turun (*decreasing events*), maka berdasarkan proposisi 2.6 diperoleh bahwa

P {kelereng nomor 1 masih ada didalam kantung pada tepat jam 12.00}

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9n}{9n+1}\right)$$

Sekarang kita akan menunjukkan bahwa:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9n}{9n+1}\right) = \left[\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9n}{9n+1}\right)\right]^{-1}$$

Maka ini setara dengan menunjukkan bahwa

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{9n}=\infty\right)$$

Sekarang, untuk semua m $\geq$ 1.

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{9n}\right) \geq \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{9n}\right) = \left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{18}\right)\left(1+\frac{1}{27}\right)\ldots$$

$$\left(1+\frac{1}{9m}\right)$$

$$> + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \ldots. + \frac{1}{9m} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i}$$

Jadi, dengan mengambil m $\rightarrow$ ∞ dan dengan menggunakan kenyataan bahwa $\sum_{i=1}^{\infty} 1/i = \infty =$ kita memperoleh

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{9n}\right) = \infty$$

Oleh karenanya, dengan memisahkan F_i sebagai kejadian bahwa kelereng nomor i ada didalam kantung pada jam 12.00, kita telah menunjukkan bahwa $P(F_i) = 0$. Begitu pula, kita dapat menunjukkan bahwa $P(F_i) = 0$ untuk semua i. (Sebagai missal, penalaran serupa menunjukkan bahwa:

$$P(E\text{i}) \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{9n}\right) = \infty$$

Oleh karenanya, peluang bahwa kantung itu tidak kosong pada jam12.00, $\left(\prod_{1}^{\infty} Fi\right)$, memenuhi

$$P\left(\bigcup_{1}^{\infty}\right)Fi \leq \sum_{i}^{\infty} P(Fi) = 0$$

berdasarkan ketidaksamaan Boole [lihat Soal Latihan Teoritis 2 dan 13 untuk Pasal 2.3 sampai 2.6]

Jadi, dengan peluang 1, kantung tersebut akan kosong pada jam 12.00

Definisi limit bisa kita terapkan tidak hanya pada barisan kejadian naik atau turun. Secara umum, untuk sembarang barisan kejadian {E, n ≥ 1}, kita definisikan kejadian baru

$$\operatorname*{Lim\,sup}_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} Ei \qquad \operatorname*{Lim\,inf}_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} Ei$$

Karena $\operatorname*{Lim\,sup}_{n\to\infty} E_n$ adalah perpotongan kejadian-kejadian $\bigcap_{n=1}^{\infty} Ei$, maka suatu titik ada di dalam $\operatorname*{Lim\,sup}_{n\to\infty} E_n$ jika, untuk semua n, titik itu ada didalam setidaknya salah satu kejadian Ei untuk i ≥ n. Namun ini berarti bahwa titik itu berada di dalam tak hingga banyaknya kejadian E, n ≥ 1. Dengan kata lain, $\operatorname*{Lim\,sup}_{n\to\infty} E_n$ terdiri dari titik yang ada didalam tak hingga banyaknya kejadian E_n, n ≥ 1.

Begitu pula, suatu titik ada didalam $\operatorname*{Lim\,inf}_{n\to\infty} E_n$ jika, untuk suatu n tertentu, titik itu ada di dalam $\bigcap_{n=1}^{\infty} Ei$, artinya jika untuk suatu n tertentu ia ada di dalam Ei untuk semua i $\geq$ n. Dengan kata lain, $\operatorname*{Lim\,inf}_{n\to\infty} E_n$ terdiri atas semua titik yang ada di dalam semua kecuali terhingga banyaknya kejadian E_n, n $\geq$ 1.

Definisi

Untuk sembarang barisan kejadian {E_n, n $\geq$ 1} jika $\operatorname*{Lim\,sup}_{n\to\infty} E_n$,= $\operatorname*{Lim\,inf}_{n\to\infty} E_n$, maka kita katakan bahwa $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} E_n$ ada dan kita mendefinisikannya sebagai $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} E_n$ = $\operatorname*{Lim\,sup}_{n\to\infty} E_n = \operatorname*{Lim\,inf}_{n\to\infty} E_n$

Disediakan sebagai latihan bagi pembaca untuk menunjukkan bahwa hal ini sejalan dengan definisi sebelumnya tentang suatu limit untuk barisan kejadian naik atau turun.

Proposisi berikutnya menunjukkan bahwa peluang bertindak sebagai suatu fungsi himpunan kontinu.

Teorema 2.1

Untuk sembarang barisan kejadian {E_n, n $\geq$ 1)

$$P\left(\operatorname*{Lim\,sup}_{n\to\infty} E_n\right) = \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} P(E_n)$$

asalkan limit kejadian-kejadian itu ada

BUKTI

$$P\left(\operatorname*{Lim\,sup}_{n\to\infty} E_n\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty} Ei\right)$$

Karena barisan $\left\{\bigcup_{i=n}^{\infty} Ei, n \geq 1\right\} E$ adalah suatu barisan turun, maka berdasarkan proposisi 6.1

$$P\left(\operatorname*{Lim\,sup}_{n\to\infty} E_n\right) = \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Ei\right) \tag{2.1}$$

Dan, karena $E_n \subset \bigcup_{t=v}^{\infty} E_i$, maka P(En) $\leq$ $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Ei\right)$

sehingga

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Ei\right) \geq \operatorname*{Lim}_{n} P(E_n) \tag{2.2}$$

Dalam hal ini, untuk sembarang barisan bilangan nyata a_n, n $\geq$ 1, $\overline{\lim_{n}} a_n$ didefinisikan sama dengan titik limit terbesar bagi himpunan {a_n, n $\geq$ 1}. Selain itu $\lim_{n} a_n$ didefinisikan sama dengan titik limit terkecilnya. Kita katakan bahwa $\lim_{n} a_n = \lim_{n} a_n$ dan nilai sekutu ini kita ambil sebagai nilai $\lim_{n} a_n$). Jadi, dari Persamaan (2.1) dan (2.2) kita memperoleh

$$P\left(\operatorname*{Lim\,sup}_{n\to\infty} E_n\right) \geq \overline{Lim}_{n}\, P(E_n)$$

Begitu pula, karena $\left(\bigcap_{t=v}^{\infty} Ei, n \geq 1\right)$ adalah suatu barisan kejadian yang naik, maka berdasarkan Proposisi 2.1 diperoleh:

$$P\left(\operatorname{Lim\,sup}_{n\to\infty} E_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty} Ei, n \geq 1\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{i=n}^{\infty} Ei\right)$$

$$= \lim_{n} p(En)$$

Ketidaksamaan terakhir ini merupakan akibat dari kenyataan bahwa $\bigcap_{t=v}^{\infty} E_i \subset E_n$, Oleh karena itu, jika $\lim_{n\to\infty} E_n$ ada, maka dan Persamaan (2.3) dan (2.4) kita memperoleh:

$$\overline{\lim_{n}}\, P(E_n) \leq P\left(\operatorname{Lim\,sup}_{n\to\infty} E_n\right) P\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) =$$

$$P\left(\operatorname{lim\,inf}_{n\to\infty} E_n\right) \leq P\left(\underline{\lim}_{n\to\infty} P(E_n)\right)$$

Yang, karena $\overline{\lim_{n}}\, P(E_n) \geq \underline{\lim}_{n}\, P(E_n)$, menunjukkan bahwa :

$$P\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) = \overline{\lim_{n}}\, P(E_n) = \underline{\lim}_{n}\, P(E_n)$$

Sehingga lengkaplah bukti ini.

Contoh 2.16

Perhatikan suatu percobaan mempunyai ruang contoh S = {x;-∞ < x < ∞}. Selanjutnya, jika didefinisikan f(a) = P(E_a), maka dari Teorema 2.1 diperoleh bahwa f(a) adalah suatu fungsi yang kontinu kanan. Hal ini disebabkan untuk sembarang barisan $a_n \rightarrow$ a dari kanan (dengan kata lain, untuk sembarang barisan a_n, n $\geq$ 1, dengan $a_n \geq$ a, maka $a_n \rightarrow$ n), tidak sukar untuk memverifikasi bahwa $\lim_n E_{an} = E_a$

Soal Latihan Teoretis

Pasal 2.1 - 2.2

Buktikan hubungan-hubungan berikut ini

1. $(E \cap F) \subset E \subset (E \cup F)$
2. Jika $E \subset F$, maka $F^c \subset E^c$
3. $F = (F \cap E) \cup (F \cap E^c)$ dan $E \cup F = F \cup (E^c \cap F)$
4. $\left(\bigcap_1^\infty E_i\right) \cap F = \bigcap_1^\infty (E_i \cap F)$, dan $\left(\bigcap_1^\infty E_i\right) \cup F = \bigcap_1^\infty (E_i \cup F)$
5. Untuk sembarang barisan kejadian E1, E2 , ….., definisikan suatu barisan baru F1, F2, …… Yang setiap dua kejadiannya selalu saling menyisihkan (artinya $F_i \cap F_j = \varnothing$ bila $i \neq j$) sedemikian rupa sehingga untuk semua n $\geq$1

   $\bigcup_1^\infty F_i = \bigcup_1^\infty E_i$

6. Diberikan tiga kejadian E, F dan G. Tentukan ungkapan bagi kejadian-kejadian sedemikian rupa sehingga diantara E, F, dan G.

(a) Hanya E yang terjadi

(b) E dan G terjadi namun F tidak

(c) Sedikitnya salah satu kejadian terjadi.

(d) Sedikitnya dua kejdian terjadi.

(e) Ketiganya terjadi

(f) Tidak ada yang terjadi

(g) Paling banyak hanya satukejadian yang terjadi.

(h) Paling banyak dua kejadian yang terjadi.

(i) Tepat dua kejadian terjadi

(j) Paling banyak tiga kejadian terjadi.

7. Tentukan ungkapan sederhana bagi kejadiãn-kejadian berikut

   (a) $(E \cup F) \cap (E \cup F^c)$

   (b) $(E \cup F) \cap (E^c \cup F) \cap (E \cup F^c)$

   (c) $(E \cup F) \cap (E \cup G)$

Pasal 2.3 - 2.6

1. Misalkan bahwa sebuah percobaan dilaksanakan n kali. Untuk sembarang kejadian E, misalkan n(E) menyatakan berapa kali kejadian E terjadi, dan definisikan f(E) = n(E)/n. Tunjukkan bahwa F(.) memenuhi Aksional-aksioma 1,2, dan 3.

2. Buktikan ketidaksamaan Boole

$$P\left(\bigcup_{1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{1}^{n} P(Ei)$$

3. Jika P(E) = 0.9 dan P(F) = 0.8, tunjukkan bahwa $P(E \cap F) \geq 0{,}7$. Secara umum, buktikan berlakunya ketidaksamaan Bonferroni, yakni :

   $P(E \cap F) \geq P(E) + P(F) - 1$

4. Tunjukkan bahwa peluang tepat salah satu kejadian E atau F terjadi ialah $P(E) + P(F) - 2P(E \cap F)$.

5. Buktikan $P(E \cap F^c) = P(E) - P(E \cap F)$.

6. Buktikan bahwa $P(E^c \cap F^c) = 1 - P(E) - P(F) + P(E \cap F)$.

7. Buktikan Proposisi 2.4

8. Sebuah kantung berisi M kelereng putih, dan N kelereng hitam. Jika suatu contoh acak berukuran r ditarik dari akntung tersebut, berapa peluang bahwa di dalamnya terkandung tepat k kelereng putih? Berapa peluang ini jika N = k = 1?

9. Gunakan induksi matematis untuk menjeneralisasi ketidaksamaan Bonferroni ke n kejadian; dengan kata lain tunjukkan bahwa

   $P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n) \geq P(E_1) + P(E_2) + \ldots P(E_n) - (n-1)$

10. Simaklah Contoh 2.13 (masalah pemadanan) dan definisikan A_N sebagai banyaknya cara tidak satu pun diantara N laki-laki tersebut berhasil mengambil topinya masing-masing. Berikan penalaran anda bahwa:

    $AN = (N - 1)(A_{N-1} + A_{N-2})$

Selanjutnya, rumus ini bersama-sama dengan syarat batas A_1= 0 dan A_2=1 dapat dipecahkan untuk memperoleh A_N, dan peluang bahwa tidak terjadi satupun perpadanan ialah $A_N/N!$.

PETUNJUK: setelah orang pertama mengambil topi yang bukan miliknya, masih terdapat N-1 orang yang harus mengambil topi diantara N-1 topi yang didalamnya tidak terdapat topi milik salah satu diantara sisa orang-orang ini. Jadi ada satu laki-laki lebihan, yang topinya diambil orang pertama, dan satu topi lebihan, milik orang pertama. Bernalarlah bahwa perpadanan tidak terjadi bila laki-laki lebihan itu mengambil topi lebihan atau laki-laki lebihan tidak mengambil topi lebihan.

11. Misalkan F_n menyatakan banyaknya cara melempar sekeping uang logam n kali sedemikian rupa sehingga tidak pernah diperoleh dua sisi gambar berturutan. Kemukakan argumentasi bahwa:

    $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ dengan $n \geq 2$ dan $f_0 = 1$, $f_2 = 2$

    Jika P_n menyatakan peluang bahwa dua' sisi berturutan tidak pernah muncul bila sekeping uang logam dilemparkan n kali, hitunglah P_n (dinyatakan dalam f_n) bila diasumsikan bahwa semua kemungkinan hasil percobaan berpeluang sama untuk terjadi. Hitunglah P_{10}.

    Jawab:

    $P_{10} = 144/2^{10} = 0{,}141$

12. Perhatikan suatu percobaan yang ruang contohnya terdiri atas sejumlah titik yang banyaknya tak hingga tercacah (*countably infinite*). Tunjukkan

bahwa tidak mungkin semua titik berpeluang muncul yang sama. Mungkinkah setiap titip mempunyai peluang terjadi yang nilainya positif?

13. Muli dengan ketidaksamaan Boole untuk sejumlah terhingga kejadian, tunjukkan bahwa untuk sembarang barisan tak hingga kejadian E_i, i $\geq$ 1,

$$P\left(\bigcup_{1}^{\infty} Ei\right) \leq \sum_{1}^{\infty} P(Ei)$$

14. Tunjukkan bahwa jika P(Ei) = 1 untuk semua i $\geq$ 1, maka $P\left(\bigcup_{1}^{\infty} P(Ei)\right) = 1$

15. Buatlah suatu barisan kejadian-kejadian Ei, i $\geq$ 1 sedemikian rupa sehingga

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} Ei = \phi \text{ dan } \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} Ei = \phi$$

16. Tunjukkan bahwa definisi umum tentang limit suatu barisan kejadian perpadanan dengan definisi yang diberikan sebelumnya untuk barisan monoton.

17. Tunjukkan bahwa jika $\sum_{i=1}^{\infty} P(Ei) < \infty$, maka $\left(\lim_{i} \sup Ei\right)$ = 0. Ini merupakan suatu hasil penting yang menunjukkan bahwa jika $\sum_{i=1}^{\infty} P(Ei) < \infty$, maka peluang terjadinya sejumlah tak hingga kejadian Ei akan sama dengan 0.

PETUNJUK: Gunakan ketidaksamaan

$$\limsup_{i} Ei = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} Ei \subset \bigcup_{i=n}^{\infty} Ei$$

Soal Latihan

Pasal 2.1 dan 2.2

1. Sebuah kantung berisi 3 kelereng, 1 merah, 1 hijau, dan 1 biru. Suatu percobaan berupa pengambilan satu kelereng dan kantung tersebut, kemudian memasukkannya kembali ke dalam kantung dan selanjutnya melakukan pengambilan kelereng yang kedua. Tuliskan ruang contohnya. Lakukan hal yang sama bila kelereng yang pertama tidak dikembalikan ke dalam kantung.

2. Sebuah dadu digulirkan sampai diperoleh sisi bermata 6. Tentukan ruang contoh percobaan ini. Misalkan E_n menyatakan kejadian bahwa percobaan dihentikan setelah n guliran. Tentukan anggota-anggota ruang contoh yang ada di dalam E_n. Berapakah $\left(\bigcup_{n}^{\infty} En\right)^{c}$?

3. Dua dadu digulirkan. Misalkan E adalah kejadian bahwa jumlah mata yang muncul ganjil; misalkan F adalah kejadian bahwa sedikitnya mata 1 muncul pada salah satu dadu; dan misalkan G adalah kejadian bahwa jumlah mata yang muncul ialah 5. Jelaskan dalam kata-kata kejadian $E \cap F$, $E \cup F$, $F \cap G$, $E \cap F$, dan $E \cap F \cap G$.

4. Secara bergantian A, B, dan C melemparkan sekeping Uang logam. Yang pertama memperoleh sisi gambar menang. Ruang contoh percobaan ini bisa didefinisikan sebagai:

$$S = \begin{cases} 1,01,001,0001,.... \\ \\ 0000..... \end{cases}$$

(a) Tafsirkan ruang contoh tersebut

(b) Tuliskan dalam unsur-unsur ruang contoh S kejadian-kejadian berikut ini :

(i) A menang = A

(ii) B menang = B

(iii) $(A \cup B)^c$.

Asumsikan bahwa A melempar pertama, kemudian B, kemudian C, kemudian A, dan begitu seterusnya.

Pasal 2.3-2.6

1. Sebuah kota yang berpenduduk 100.000 jiwa mempunyai 3 surat kabar: I, II, dan III. Proporsi penduduk kota ini yang membaca surat kabar tersebut ialah sebagai berikut:

I: 10 persen I dan II: 8 persen

I dan II dan III : 1 persen

II: 30 persen I dan III: 2 persen

III : 5 persen II dan III : 4 persen

(Data ini mengatakan kepada kita bahwa, misalnya, 8000 orang membaca surat kabar I dan II).

(a) Hitunglah banyaknya orang yang membaca hanya satu surat kabar.

(b) Berapa banyak orang yang membaca hanya satu surat kabar.

(c) Jika I dan III adalah surat kabar pagi sedangkan II surat kabar sore, berapa banyak orang yang membaca sedikitnya satu surat kabar pagi plus satu surat kabar sore?

(d) Berapa banyak orang membaca hanya satu surat kabar pagi dan satu surat kabar sore?

2. Data berikut diperoleh dari satu penelitian terhadap 1000 pelanggan suatu majalah. Dalam kaitan dengan jenis kelamin, status perkawinan, dan pendidikan, dilaporkan sejumlah 312 pelanggan adalah laki-laki, 470 sudah menikah, 525 sarjana, 42 laki-laki sarjana, 147 sarjana dan sudah menikah, 86 laki-laki dan sudah menikah, dan 25 laki-laki sarjana dan sudah menikah. Tunjukkan bahwa angka-angka yang dilaporkan ini pasti ada yang salah.

   Petunjuk: Misalkan L, M, dan S masing-masing menyatakan laki-laki, sudah menikah, dan sarjana. Misalkan seorang diambil secara acak dan gunakan Proposisi 2.4 untuk menunjukkan bahwa jika angka-angka yang dilaporkan ini benar, maka $P(L \cup M \cup S) > 1$.

3. Seperangkat kartu brij dibagikan. Berapa peluang bahwa kartu keempat belas yang dibagikan ialah

kartu As? Berapa peluang bahwa kartu As pertama muncul pada kartu yang keempat belas?

4. Jika disumsikan bahwa semua $\binom{52}{2}$ kemungkinan dalam permainan kartu poker berpeluang sama untuk muncul, berapa peluang diperoleh:

   (a) Suatu flush [Kartu pegangan dinamakan flush jika kelima kartu berjenis sama (same suit)]

   (b) One pair (ini terjadi jika kartu-kartu itu bernilai a, a, b, c, d, sedangkan a, b, c, dan d semuanya berbeda)

   (c) Two pairs (ini terjadi jika kartu-kartu bernilai a, a, b, b, c sedangkan a, b dan c semuanya berbeda)

   (d) Tiga jenis (three-of-a-kind) (ini terjadi jika kartu-kartu itu bernilai a, a, a, b, c, sedangkan a, b, dan c semuanya berbeda).

   (e) Empat sejenis (four-of-a-kind) (ini terjadi jika kartu-kartu itu bernilai a, a, a, a, b).

5. Permainan dadu poker dimainkan dengan menggulirkan secara berbarengan 5 dadu. Tunjukkan bahwa:

   (a) P {tidak ada dua yang sama} = 0,0926

   (b) P {ada sepasang yang sama} = 0,4630

   (c) P {dua pasang yang sama}= 0,2315

   (d) P {ada tiga yang sama) = 0,1543

   (e) P {Full house) = 0,0386

(f) P {ada empat yang sama} = 0,0193

(g) P {ada lima yang sama} = 0,0008

6. Bila 8 benteng diletakkan secara cak pada suatu papan catur, hitunglah peluang tidak ada satu benteng yang bisa memakan benteng lainnya. Dengan kata lain, hitunglah peluang bahwa tidak ada satu bans atau lajur yang berisi lebih dan satu benteng.

7. Dua kartu diambil secara acak dan seperangkat kartu brij. Berapa peluang keduanya membentuk suatu blackjack. Dengan kata lain, berapa peluang bahwa kartu yang satu ialah As sedngkan yang satu lagi kartu sepuluh, jack, queen, atau king?

8. Bila dua dadu digulirkan, berapa peluang bahwa jumlah kedua mata yang muncul sama dengan i? kerjakan untuk i = 2,3,..., 11, 12.

9. Sepasang dadu digulirkan sampai muncul jumlah mata 5 dan 7. Hitunglah peluang bahwa jumlah mata 5 muncul lebih dulu.

   PETUNJUK: Misalkan E_n menyatakan kejadian bahwa jumlah mata 5 muncul pada guliran ke-n dan jumlah mata 5 dan 7 belum pernah muncul pada n-1 guliran yang pertama. Hitunglah $P(E_n)$ dan kemukakan argumentasi bahwa $\sum_{i=2}^{12} P(Ei)$. Ialah peluang yang dicari.

10. Permainan Craps dimainkan sebagai berikut. Seorang pemain menggulirkan dua dadu sekaligus. Jika jumlah kedua dadu ialah 2,3, atau 12, ia kalah;

jika jumlahnya 7 atau 11, ia menang. Jika hasil percobaannya selain ini, pemain ini harus melanjutkan pengguliran dadu sampai diperoleh hasil-percobaan yang sama atau diperoleh jumlah 7. Jika jumlah mata 7 muncul lebih dulu, ia kalah; sedangkan jika hasil-percobaan yang sama terulang muncul kembali sebelum jumlah mata 7, ia menang. Hitunglah peluang seorang pemain menang dalam permainan craps ini.

PETUNJUK : Misalkan Ei adalah kejadian bahwa hasil pengguliran pertama adalah jumlah mata i dan pemain tersebut menang. Peluang yang dicari ialah $\sum_{i=2}^{12} P(Ei)$. Untuk menghitung P(Ei), definisikan kejadian $E_{i,n}$ sebagai kejadian bahwa jumlah mata pada guliran pertama ialah i dan pemain ini memang pada guliran ke-n. Kemukakan argumentasi bahwa P(Ei) = $\sum_{i=2}^{\infty} P(Ei)$

11. Sebuah kantung berisi 3 kelereng merah dan 7 kelereng hitam. Pemain A dan B mengambil kelereng secara bergantian sampai diperoleh kelereng merah. Hitunglah peluang bahwa A yang memperoleh kelereng merah. (A mengambil lebih dulu, kemudian B, dan begitu seterusnya. Bola yang telah terambil tidak dikembalikan ke dalam kantung).

12. Sebuah kantung berisi 5 kelereng merah, 6 kelereng biru, dan 8 kelereng hijau. Jika tiga kelereng diambil secara acak, berapa peluang bahwa ketiga kelereng ini berwarna sama? Berbeda warna? Jawablah

pertanyaan yang sama jika kelereng yang telah terambil dikembalikan ke dalam kantung sebelum pengambilan berikutnya setelah terlebih dulu warnanya dicatat. Keadaan yang terakhir ini dikenal sebagai penarikan contoh dengan pemulihan (sampling with replacement).

13. Kantung A berisi 3 kelereng merah dan 3 kelereng hitam, sedangkan kantung B berisi 4 kelereng merah dan 6 kelereng hitam. Jika sebuah kelereng diambil secara acak dari setiap kantung, berapa peluang keduanya akan berwarna sama?
14. Sebuah regu bola basket 3 orang terdiri atas seorang guard, seorang forward, dan seorang center. Jika seorang pemain diambil secara acak dan masing-masing tiga regu yang ada, berapa peluang memperoleh sebuah regu yang lengkap? Berapa peluang bahwa ketiga orang yang terpilih bermain pada posisi yang sama?
15. Disebuah kota ada 5 hotel. Jika 3 teman menginap di hotel-hotel tersebut pada suatu hari, berapa peluang ketiganya menginap di hotel- hotel yang berbeda? Asumsi apa yang anda berlakukan?
16. Sebuah kota kecil mempunyai 4 orang yang biasa memperbaiki televisi. Jika ada 4 televisi yang rusak, berapa peluang tepat i orang dipanggil untuk memperbaiki televisi yang rusak tersebut? Selesaikan soal ini untuk i = 1,2,3,4. Asumsi apa yang anda berlakukan?
17. Sebuah dadu digulirkan 4 kali. Berapa peluang mata 6 muncul sedikitnya sekali?

18. Dua dadu dilemparkan sekaligus sebanyak n kali. Hitunglah peluang kedua dadu muncul angka 6 sedikitnya sekali. Berapa besar n agar peluang ini lebih besar atau sama dengan ½?

19. Jika N orang, termasuk A dan B, disusun secara acak membentuk satu barisan, berapa peluang bahwa A dan B saling bersebelahan? Berapa peluang ini bila orang-orang tersebut disusun membentuk satu lingkaran?

20. Dari suatu grup yang terdiri atas 3 freshmen (mahasiswa tingkat 1), 4 sophomores (tingkat 2), 4 juniors (tingkat 3) senior (tingkat 4) dibentuk sebuah panitia yang terdiri atas 4 orang secara acak. Hitunglah peluang bahwa panitia itu terdiri atas (a) 1 orang dan setiap tingkat, (b) 2 sophomores dan 2 juniors, dan (c) sophomores dan juniors saja.

21. Seseorang mempunyai n kunci namun hanya satu yang bisa membuka sebuah pintu tertentu. Jika ia mencoba kunci-kunci ini secara acak, menyisihkan yang ternyata tidak cocok, berapa peluang bahwa ia berhasil membuka pintu itu pada upaya yang ke-k? Bagaimana jika ia tidak menyisihkan kunci-kunci yang telah dicoba sebelumnya?

22. Diketahui ada 20 orang. Berapa peluang ada 4 bulan yang di masing-masing bulannya ada tepat 2 orang yang berulang tahun pada bulan tersebut dan ada 4 bulan lagi yang di masing-masing bulannya tepat ada 3 orang yang berulang tahun pada bulan tersebut?

23. Sebuah grup yang terdiri atas 6 laki-laki dan 6 perempuan dibagi secara acak menjadi 2 grup

masing-masing 6 orang. Berapa peluang bahwa di kedua grup pecahan ini terdapat laki-laki yang sama banyaknya?

24. Dalam permainan brij, hitunglah peluang bahwa anda memperoleh 5 kartu spade dan pasangan anda memperoleh 8 kartu spade sisanya.

25. Misalnya n klereng dimasukkan secara acak ke dalam N kantung. Hitung peluang bahwa m kelereng akan masuk ke dalam kantung pertama. Asumsikan bahwa semua N^n kemungkinan berpeluang sama untuk terjadi.

26. Didalam sebuah rak sepatu terdapat 10 pasang sepatu. Jika 8 sepatu kaki diambil secara acak, berapa peluang (a) tidak ada pasangan sepatu yang terambil, dan (b) tepat ada 1 pasang sepatu yang terambil?

27. Sebuah regu bola basket terdiri atas 6 orang kulit hitam dan 4 orang kulit putih. Jika ditempat mereka menginap ada 5 kamar yang masing-masing hanya cukup untuk dua orang, sedangkan penentuan kamarnya ditetapkan secara acak, berapa peluang ada tepat 2 kamar yang ditempati pemain berkulit hitam dan putih?

28. Jika 4 pasang suami-isteri duduk membentuk satu barisan, berapa peluang tidak ada suami yang duduk disebelah isterinya?

29. Didalam permainan brij, hitunglah peluang bahwa seorang pemain tertentu tidak memperoleh sedikitnya satu jenis kartu. (Semuanya ada 4 jenis kartu). Perhatikan jawaban bukan

$$\frac{\binom{4}{1}\binom{39}{13}}{\binom{53}{13}}$$

Mengapa bukan?

PETUNJUK: Gunakan Proposisi 2.4

30. Hitunglah peluang bahwa 13 kartu yang diambil secara acak dan seperangkat kartu brij mengandung kartu As dan King dan jenis yang sama.

Bab 3
Peluang Bersyarat dan Kebebasan

3.1 Pendahuluan

Di dalam bab ini kita akan berkenalan dengan gagasan yang paling penting di dalam teori peluang, yaitu tentang peluang bersyarat. Pentingnya gagasan ada dua. Pertama, kita sering berkepentingan untuk menghitung peluang bila suatu informasi parsial tentang hasil percobaan diketahui : dalam hal demikian, peluang yang dicari ialah peluang bersyarat. Kedua, bahkan walaupun tidak ada informasi parsial yang tersedia, seringkali berguna untuk menggunakan peluang bersyarat sebagai suatu alat untuk memudahkan perhitungan peluang yang dicari.

3.2 Peluang Bersyarat

Misalkan kita mengeluarkan dua dadu dan misalkan masing-masing dari 36 hasil percobaan yang ada berpeluang sama untuk terjadi, sehingga peluangnya masing-masing ialah 1/36. Lebih jauh misalkan bahwa dadu pertama muncul mata 3. Maka, dengan diketahuinya informasi ini, berapa peluang bahwa jumlah kedua mata dadu yang muncul sama dengan 8? Untuk menghitung peluang ini, kita bernalar sebagai berikut : Bila diketahui bahwa dadu pertama muncul mata 3, maka paling banyak ada 6 kemungkinan hasil percobaan yaitu : (3,1), (3,2), (3,4), (3,5), dan (3,6). Karena setiap hasil-percobaan ini pada mulanya berpeluang muncul sama, maka hasil-hasil percobaan ini juga tetap berpeluang muncul sama. Dengan kata lain, bila dadu pertama muncul mata 3, maka peluang (bersyarat) masing-masing hasil percobaan (3,1), (3,2), (3,4), (3,5), dan (3,6) ialah 1/6, sedangkan peluang (bersyarat) 30 titik lainnya didalam ruang contoh ialah 0. Jadi, peluang yang diinginkan ialah 1/6.

Jika E menyatakan kejadian diperolehnya jumlah mata 8, sedangkan F adalah kejadian bahwa dadu pertama muncul mata 3, maka peluang yang baru diperoleh diatas dinamakan peluang bersyarat terjadinya E bila diketahui F telah terjadi, dan dilambangkan sebagai

P (E\F)

Suatu rumus umum bagi P (E\F) yang berlaku untuk semua kejadian E dan F diturunkan dengan cara yang sama. Bila kejadian F terjadi, maka agar E terjadi haruslah kejadian yang sesungguhnya merupakan sebuah titik yang sekaligus didalam E dan didalam F, dengan kata lain harus didalam $E \cap F$. Sekarang, karena kita tahu bahwa F telah terjadi, haruslah F menjadi ruang contoh kita yang baru; oleh karenanya peluang terjadinya kejadian $E \cap F$ sama dengan peluang $E \cap F$ relatif terhadap peluang kejadian F. Jadi,

$$P(E \setminus F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

Perhatikan bahwa persamaan (3.1) hanya terdefinisikãn bila P(F)>0. Ini berarti bahwa P(E\F) hanya terdefinisikan bila P(F) > 0.

Contoh 3.1

Sebuah kantung berisi 10 kelereng putih, 5 kelereng kuning, dan 10 kelereng hitam. Sebuah kelereng diambil secara acak dari kantung tersebut, dan ternyata bukan kelereng hitam. Berapa peluang bahwa itu ialah kelereng kuning?

Penyelesaian : Misalkan K adalah kejadian terambilnya kelereng kuning dan H^c kejadian bahwa yang terambil bukan kelereng hitam. Sekarang, dari persamaan (3.1).

$$P(K \setminus H^c) = \frac{P(K \cap H^c)}{P(H^c)}$$

Akan tetapi $K \cap H^c = K$, karena kelereng itu berwarna kuning dan bukan hitam jika dan hanya jika berwarna kuning. Jadi, dengan mengasumsikan bahwa masing-masing dari 25 kelereng itu berpeluang terambil sama, maka kita memperoleh:

$$P\ (K \setminus H^c) = \frac{5/25}{15/25} = \frac{1}{3}$$

Contoh 3.2

Sekeping uang logam dilemparkan dua kali. Jika diasumsikan bahwa keempat titik didalam ruang contoh S = {(G,G), (G,A), (A,G), (A,A)} Berpeluang muncul sama, berapakah peluang bersyarat kedua lemparan itu menghasilkan sisi gambar, bila diketahui lemparan pertama menghasilkan sisi gambar?

Penyelesaian : Jika E = {(G,G)} menyatakan kejadian bahwa kedua lemparan menghasilkan sisi gambar, dan F = {(G,G), (G,A)} kejadian bahwa lemparan pertama menghasilkan sisi gambar, maka peluang yang dicari ialah:

$$P(E\backslash F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{P(\{G,G\})}{P(\{(g,G),(G,A)\})} = \frac{1/4\ 1}{2/4\ 2}$$

Contoh 3.3

Perusahaan tempat Jones bekerja mengadakan pesta makan malam ayah dan anak laki-laki (*father and son dinner party*) bagi pegawai yang mempunyai sedikitnya satu anak laki-laki. Setiap pegawai ini diundang datang bersama dengan anak laki-laki sulungnya. Jika Jones diketahui mempunyai dua anak, berapa peluang keduanya laki-laki, jika diketahui bahwa ia juga ikut diundang? Asumsikan bahwa ruang contohnya S = {(1,1), (1,p), (p,1), (p,p)} dan semua titik contoh ini berpeluang muncul sama [(1 ,p) berarti bahwa anak sulungnya laki-laki dan anak keduanya perempuan]

Penyelesaian:

Pengetahuan bahwa Jones diundang dalam pesta setara dengan informasi bahwa ia mempunyai sedikitnya satu anak laki-laki. Jadi, dengan menyatakan E sebagai kejadian bahwa kedua anaknya laki-laki dan F kejadian bahwa sedikitnya salah satu anaknya laki-laki, maka peluang yang kita inginkan ialah:

$$P(E\backslash F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{P(\{1,1\})}{P(\{(1,1),(1,p),(p,1)\})} = \frac{1/4\ 1}{3/4\ 3}$$

Contoh 3.4

Yanti belum pasti apakah akan mengambil mata kuliah bahasa Perancis atau Kimia. Meskipun sesungguhnya ia menyenangi kimia, namun ia memperkirakan peluangnya memperoleh nilai A ialah ½ dalam mata kuliah bahasa Perancis, sedangkan peluang itu hanya 1/3 dalam mata kuliah Kimia. Jika Yanti mendasarkan keputusannya pada pelemparan sekeping uang logam yang setimbang, berapa peluang ia memperoleh nilai A dalam mata kuliah Kimia?

Penyelesaian:

Jika C adalah kejadian bahwa Yanti mengambil mata kuliah Kimia dan A menyatakan bahwa ia memperoleh nilai A dalam mata kuliah apa pun yang ia ambil, maka peluang yang dicari ialah $P(C \cap A)$. Ini dihitung dengan menggunakan persamaan (3.1) sebagai berikut :

$$P(C \cap A) = P(C)P(A\backslash C) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

Contoh 3.5

Misalkan sebuah kantung berisi 8 kelereng merah dan 4 kelereng putih. Kita mengambil 2 kelereng dari kantung itu tanpa pemilihan. Jika diasumsikan bahwa, pada setiap ambilan, setiap kelereng di dalam kantung berpeluang terambil sama, berapa peluang bahwa kedua kelereng yang terambil berwarna merah?

Penyelesaian:

Misalkan R1 dan R2 masing-masing menyatakan kejadian bahwa kelereng yang terambil pertama dan kedua berwarna merah. Sekarang, bila diketahui kelereng yang terambil pertama ialah merah, maka yang tersisa ialah 7 kelereng merah dan 4 kelereng putih, sehingga $P(R_2 \backslash R_1)$ 2/11. Karena jelas $P(R_1) = 8/12$, maka peluang yang dicari ialah:

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)P(R_2 \mid R_1) = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{7}{11}\right) = \frac{14}{33}$$

Tentu saja peluang ini juga dapat dihitung melalui rumus :

$$P(R_1 \cap R_2) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}}$$

3.3 Rumus Bayes

Misalkan E dan F ialah sembarang dua kejadian. Kita dapat menulis E sebagai :

$E = (E \cap F) \cup (E \cap F^c)$

Sebab agar suatu titik ada didalam E, titik itu harus ada didalam E dan F atau ada di dalam E dan tidak ada didalam F. Karena $E \cap F$ dan $E \cap F^c$ jelas saling menyisihkan, maka:

$$P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap F^c)$$

$$= P(E \backslash F)P(F) + P(E \backslash F^c)P(F^c)$$

$$+ P(E \backslash F)P(F) + P(E \backslash F^c)[1 - P(F)]$$

Persamaan (3.2) mengatakan bahwa peluang kejadian E adalah rataan terboboti peluang bersyarat E, jika diketahui F telah terjadi dan peluang bersyarat E jika diketahui F tidak terjadi. Dalam hal ini masing-masing peluang bersyarat itu diberi bobot sebesar peluang terjadinya syarat tersebut.

Contoh 3.6 (bagian 1)

Sebuah perusahaan asuransi percaya bahwa orang-orang dapat dibagi atas dua kelompok yang cenderung mengalami kecelakaan (*accident prone*) dan yang tidak. Statistic perusahaan menunjukkan bahwa orang yang cenderung mengalami kecelakaan akan mengalami kecelakaan pada suatu waktu dalam kurun waktu 1 tahun dengan peluang 0,4, sedangkan peluang ini turun menjadi 0,2 untuk yang tidak cenderung mengalami kecelakaan. Bila diasumsikan bahwa 30 persen populasi cenderung mengalami kecelakaan, berapa peluang bahwa seorang pemegang polis baru akan mengalami kecelakaan dalam waktu setahun sejak ia membeli polis tersebut?

Penyelesaian:

Kita akan menghitung peluang yang dicari dengan pertama-tama mengkondisikan apakah pemegang polis itu mengalami kecelakaan ataukah tidak? Misalkan A_1

menyatakan kejadian bahwa pemegang polis akan mengalami kecelakaan dalam periode satu tahun sejak membeli polis; dan misalkan A adalah kejadian bahwa pemegang polis itu cenderung mengalami kecelakaan. Maka peluang yang dicari, $P(A_1)$, ialah

$P(A_1)P(A_1\backslash A)P(A)+P(A_1A^c)P(A^c)$ =

(0,4)(0.3)+(0.2)(0.7) = 0.26

Contoh 3.6 (bagian 2)

Misalkan seorang pemegang polis baru mengalami kecelakaan dalam waktu sebelum satu tahun sejak ia membeli polis. Berapa peluang bahwa ia cenderung mengalami kecelakaan?

Penyelesaian : Peluang yang dicari ialah:

$$P(A\backslash A_1) = \frac{P(A \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{P(A)P(A_1|A)}{P(A_1)} = \frac{(0.3)(0.4)}{0.26} = \frac{6}{3}$$

Contoh 3.7

Kantung I berisi 2 kelereng putih dan 4 kelereng merah, sedangkan kantung II berisi 1 kelereng putih dan 1 kelereng merah. Sebuah kereleng diambil secara acak dari kantung I dan dimasukkan kedalam kantung II, dan kemudian sebuah kelereng diambil secara acak dari kantung II.

1. Berapa peluang terambilnya kelereng putih dari kantung II?

2. Berapa peluang bersyarat bahwa kelereng yang terambil dari kantung I ialah kelereng putih bila diketahui kelereng yang terambil kantung II juga putih?

   Penyelesaian : Misalkan W adalah kejadian terambilnya kelereng putih dari kantung I, dan E adalah kejadian terambilnya kelereng putih dari kantung II. Maka:

   1. $P(E) = P(E\backslash W)P(W)+P(E\backslash W^c)P(W^c) = (\frac{2}{3})(\frac{2}{6}) + (\frac{1}{3})(\frac{1}{6}) = \frac{4}{9}$

   2. $P(W\backslash E) = \frac{P(W \cap E)}{P(E)} = \frac{P(E \backslash W)P(W)}{P(E)} = \frac{1}{2}$

Contoh 3.8

Ketika menjawab pertanyaan pada suatu ujian dengan soal-soal pilihan berganda, seorang mahasiswa memang mengetahui jawabannya atau ia hanya menebak-nebak saja. Misalkan p adalah peluang ia memang mengetahui jawabannya dan 1-p peluang bahwa ia cuma menebak saja. Asumsikan bahwa seorang mahasiswa yang menebak-nebak jawabannya berhasil menebak dengan benar dengan peluang 1/m, dalam hal ini m ialah banyaknya alternatif pilihan pada setiap pertanyaan. Berapa peluang bersyarat bahwa seorang mahasiswa menang memang mengetahui jawaban terhadap suatu pertanyaan, bila ternyata ia menjawab pertanyaan itu dengan benar?

Penyelesaian : Misalkan B dan T masing-masing menyatakan kejadian bahwa mahasiswa bersangkutan menjawab dengan benar dan kejadian bahwa ia memang mengetahui jawabannya, maka:

$$P(T\backslash B) = \frac{P(T \cap B)}{P(B)} =$$

$$\frac{P(B \backslash T)P(B)}{P(B \backslash T)P(T) + P(B \backslash T^c)P(T^c)}$$

$$= \frac{P}{p + (1/m)(1-p)} = \frac{mp}{1+(m-1)p}$$

Jadi, sebagai missal, jika m 5, p = ½, maka peluang seorang mahasiswa memang benar-benar mengetahui jawaban terhadap suatu pertanyaan yang berhasil dijawabnya dengan benar ialah 5/6.

Contoh 3.9

Suatu tes darah dilaboratorium 95 persen efektif dalam mendeteksi suatu penyakit tertentu bila memang penyakit itu ada. Akan tetapi, tes ini juga memberikan suatu "positif palsu" terahadap I persen orang-orang sehat yang dites. (Artinya, jika seorang yang sehat diuji, maka, dengan peluang 0,01, hasil tes akan mengindikasikan bahwa ia mengidap penyakit tersebut). Jika 0.5 persen populasi mengidap penyakit itu, berapa peluang seseorang mengidap penyakit ini bila hasil tesnya positif?

Penyelesaian : Misalkan D adalah kejadian bahwa orang yang diuji mengidap penyakit ini dan E kejadian bahwa hasil tesnya positif. Peluang yang dicari P(D\E) diperoleh sebagai berikut:

$$P(D\backslash E) = \frac{P(D \cap E)}{P(B)} =$$

$$\frac{P(E|D)P(D)}{P(E|D)P(D) + P(E|D^c)P(D^c)}$$

$$= \frac{(0.95)(0.005)}{(0.95)(0.005) + (0.01)(0.995)} = \frac{95}{294} \approx$$

0.323

Jadi, hanya 32 persen diantara mereka yang hasil tesnya positif benar-benar mengidap penyakit tersebut. Karena banyaknya mahasiswa yang terheran-heran dengan hasil perhitungan ini (karena mereka membayangkan angka ini jauh lebih tinggi, sebab tes darah ini tampaknya sangat bagus), ada baiknya diberikan argumentasi lain yang, walaupun kurang ketat dibandingkan dengan argumentasi diatas, mungkin lebih jelas dan mudah diterima.

Karena 0,5 persen populasi mengidap penyakit ini, maka secara rata-rata 1 orang diantara 200 orang yang dites akan mengidap penyakit ini. Tes ini akan mendeteksi secara benar bahwa orang tersebut mengidap penyakit dengan peluang 0,95. Jadi, secara rata-rata, diantara 200 orang yang dites, tes ini mendeteksi secara benar bahwa 0,95 orang mengidap penyakit tersebut. Akan tetapi, secara rata-rata diantara 199 orang sehat, tes ini akan mendeteksi secara salah bahwa (199)(,.01) diantara orang-orang ini mengidap penyakit tersebut. Jadi, untuk setiap 0,95 orang yang mengidap penyakit yang oleh tes ini dideteksi secara benar bahwa mereka sakit, secara rata-rata ada (199) (0,01) orang sehat yang oleh tes ini dideteksi secara salah bahwa mereka sakit. Jadi, proporsi benarnya tes ini bila tes ini menyatakan bahwa seseorang sakit ialah:

$$\frac{(0.95)}{0.95+(199)(0.01)} = \frac{95}{294} \approx 0,323$$

Persamaan (3.2) dapat digeneralisasikan sebagai berikut : Misalkan bahwa F_1, F_2 ... F_n adalah kejadian-kejadian yang saling menyisihkan sedemikian rupa sehingga :

$$\bigcup_{i=1}^{n} Fi = S$$

Dengan kata lain, tepat satu diantara kejadian-kejadian F_1, F_2,... F_n yang akan terjadi. Dengan menuliskan:

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} (E \cap F)$$

dan dengan menggunakan kenyataan bahwa kejadian-kejadian $E \cap F_i$, i=1…n, saling menyisihkan, maka kita memperoleh bahwa:

$$\text{P(E)} = \sum_{i=1}^{n} P(E \cap Fi)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(E \setminus Fi)P(Fi) \qquad (3.3)$$

Sekarang misalkan bahwa E telah terjadi dan kita ingin Fj mana yang juga terjadi Berdasarkan Persamaan (3.3) kita memperoleh bahwa :

$$P(Fj\backslash E) = \frac{P(E \cap F_j)}{P(E)}$$

$$= \frac{P(E \backslash F_j)P(F_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(E \backslash F_j)P(F_j)}$$

Persamaan (3.4) dikenal sebagai rumus Buyes, yang diberi nama mengikuti Thomas Bayes, seorang filsuf berkebangsaan Inggris. Jika kita membayangkan kejadian-kejadian F1 sebagai “hipotesis-hipotesis” yang mungkin tentang suatu hal, maka rumus Bayes dapat ditafsirkan sebagai menunjukkan kepada kita bagaimana pendapat-pendapat tentang hipotesis-hipotesis yang dikemukakan sebelum percobaan (yaitu P(F,) harus dimodifikasi sesuai dengan hasil percobaan yang telah dilaksanakan.

Contoh 3.10

Misalkan kita tahu bahwa surat tertentu berpeluang sama ada didalam salah satu dari 3 map yang berbeda. Misalkan α_i adalah peluang kita akan menemukan surat itu setelah mencari sejenak didalam map i bila memang surat itu ada didalam map i, i = 1, 2, 2. (Mungkin saja $\alpha_i <$ 1) Berapa peluang bersyarat bahwa surat tersebut ada didalam map i, i = 1,2,3, bila pencarian sejenak didalam map 1 tidak menemukan surat tersebut?

Penyelesaian Misalkan F_i, i = 1,2,3, adalah kejadian bahwa surat tersebut ada didalam map i; dan misikan E adalah kejadian bahwa pencarian sejenak di map 1 tidak menemukan surat tersebut. Dari rumus Bayes kita memperoleh:

$$P(F_1 \backslash E) = \frac{P(E \cap F_1)}{P(E)} = \frac{P(E \| F_1)P(F_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(E | F_i)P(F_i)}$$

$$= \frac{(1-\alpha_1)(1/3)}{(1-\alpha_1)(1/3)+1/3+1/3} = \frac{1-\alpha_1}{3-\alpha_1}$$

dan, untuk j = 2,3

$$P(F_j | E) = \frac{P(E \| F_j)P(F_j)}{\sum_{i=1}^{3} P(E | F_j)P(Fi)}$$

$$= \frac{1/3}{(1-\alpha_1)(1/3)+1/3+1/3} = \frac{1}{3-\alpha_1}$$

Untuk variasi lain bagi Contoh 3.10, misalkan sebuah pesawat terbang yang rusak berpeluang sama jatuh di tiga kemungkinan daerah. Dalam hal demikian, peluang yang terlupakan 1 - α_i, i = 1,2,3, bersumber pada kondisi-kondisi geografis dan lingkungan dari ketiga daerah tersebut.

Contoh berikut ini sering digunakan oleh para mahasiswa yang mengambil mata kuliah peluang untuk memenangkan uang dari teman-teman mereka yang kurang mengetahui.

Contoh 3.11

Misalkan kita mempunyai 3 kartu yang persis sama bentuk dan gambarnya kecuali bahwa kedua sisi kartu pertama berwarna merah, kedua sisi kartu kedua berwarna hitam, dan satu sisi kartu ketiga berwarna merah dan sisi lainnya berwarna hitam. Ketiga kartu dikocok, dan kemudian 1 kartu diambil secara acak dan diletakkan diatas meja. Jika kartu yang terambil itu berwarna merah disisi atasnya, berapa peluang sisi bawahnya berwarna hitam?

Penyelesaian:

Misalkan MM, dan HH, dan MH masing-masing menyatakan kejadian bahwa kartu yang terambil ialah kartu merah-merah, kartu hitam-hitam, dan kartu merah-hitam. Bila M adalah kejadian bahwa sisi atas yang terbuka berwarna merah, maka peluang yang dicari ialah:

$$P(MH\backslash M) = \frac{P(MH \cap M)}{P(M)}$$

$$= \frac{P(M|MH)\,P(MH)}{P(M|MM)P(MM) + P(M|MH)P(MH) + P(M|MH)P(HH)}$$

$$= \frac{(1/2)(1/3)}{(1)(1/3) + (1/2)(1/3) + (0)(1/3)} = \frac{1}{3}$$

Jadi, jawabanya ialah 1/3. Beberapa mahasiswa menebak ½ sebagai jawaban yang benar karena menalar secara salah sebagai berikut : Bila sisi merah yang muncul, maka ada dua kemungkinan yang berpeluang sama besar untuk terjadi, yaitu kartu itu kartu merah-merah atau kartu merah-hitam. Kesalahan penalaran ini terletak pada pengasumsian bahwa kedua kemungkinan itu berpeluang muncul sama besar. Sebab, bila setiap kartu kita anggap terdiri atas dua sisi yang berbeda, maka ada 6 kemungkinan yang berpeluang muncul sama yaitu M_1, M_2, H_1, H_2, M_3, M_3, H_3. Dalam hal ini M_1 terjadi jika sisi pertama kartu merah-merah terbuka, M_2 terjadi jika sisi kedua kartu merah-merah terbuka, M_3 terjadi jika sisi merah kartu merah-hitam terbuka, dan sebagainya. Karena sisi hitam di balik sisi merah yang terbuka hanya mungkin terjadi jika hasil percobaannya ialah M_3, maka kita lihat bahwa peluang yang dicari sesungguhnya ialah peluang bersyarat M_3 bila diketahui bahwa M_1, atau M_2, atau M_3 telah terjadi, yang tertentu saja sama dengan 1/3.

Contoh 3.12

Di sebuah klinik psikiatri para pekerja sosial begitu sibuknya sehingga, secara rata-rata, hanya 60% dari calon pasien baru yang menelpon bisa segera berbicara langsung dengan pekerja sosial yang menerimanya. Empat puluh persen lainnya diminta meninggalkan nomor telponnya untuk dihubungi kembali nanti. Secara rata-rata, keberhasilan seorang pekerja sosial menghubungi kembali nomor telpon itu pada hari yang sama ialah 75%, sedangkan 25% lainnya dihubungi pada hari berikutnya. Pengalaman di klinik ini menunjukkan bahwa peluang seorang penelpon akan datang ke klinik itu untuk berkonsultasi ialah 0,8 bila penelpon itu berhasil berbicara langsung dengan seorang pekerja sosial, sedangkan peluang itu menjadi 0,6 bila ia dihubungi kembali pada hari yang sama, atau menjadi 0,4 bila ia dihubungi pada keesokan harinya.

1. Berapa persentase orang yang menelpon datang ke kinik untuk berkonsultasi?
2. Berapa persentase pasien yang datang ke klinik, telponnya bisa diterima langsung oleh seorang pekerja sosial?

Penyelesaian : Definisikan kejadian-kejadian V, I, S, dan F sebagai berikut :

V : Penelpon datang ke klinik untuk berkonsultasi

I : Penelpon bisa berhubungan langsung dengan pekerja sosial

S : Penelpon dihubungi kembali pada hari yang sama

F : Penelpon dihubungi kembali pada keesokan harinya.

Maka :

P(V) = P(V\I)P(I)+P(V\S)P(S)+P(V)P(F)

=(0,8)(0,6)(0,6)(0,4)(0,75)+(0,4)(0,4)(0,4)(0,25)

= 0,70

dalam hal ini kita menggunakan fakta bahwa P(S) = (0,4)(0,75) dan P(F) = (0,4)(0,25). Jadi, terjawablah sudah pertanyaan (1). Untuk menjawab pertanyaan (2), kita lihat bahwa :

$$P(I\backslash V) = \frac{P(V|I)P(I)}{P(V)} = \frac{(0.8)(0.6)}{0.7} = 0{,}686$$

Jadi, sekitar 69 persen pasien yang datang ke klinik dering tilpunnya berhasil dijawab langsung oleh seorang pekerja sosial.

3.4 Kejadian-kejadian Bebas

Contoh-contoh sebelumnya yang diberikan di dalam bab ini menunjukkan bahwa P(E\F), peluang bersyarat E bila F diketahui telah terjadi, secara umum tidak sama dengan P(E), peluang (tidak bersyarat) kejadian E. Dengan kata lain, pengetahuan bahwa F telah terjadi seringkali mengubah peluang terjadinya kejadian E. Dalam kasus khusus bila P(E\F) sama dengan P(E), kita katakana bahwa E bebas dan F. Artinya, E bebas dan F bila pengetahuan bahwa F telah terjadi tidak mengubah peluang terjadinya kejadian E.

Karena $P(E\backslash F) = P(E\cap F)/P(F)$, maka E bebas dari F bila

$$P(E\cap F) = P(E)P(F) \qquad (3.5)$$

Karena persamaan (3.5) setangkup dalam E dan F, ini menunjukkan bahwa bila E bebas dari F, maka F juga bebas dari E. Jadi, kita memperoleh definisi berikut :

Definisi

Dua kejadian E dan F dikatakan bebas jika Persamaan (3.5) dipenuhi.

Dua kejadian E dan F yang tidak bebas dikatakan tak-bebas.

Contoh 3.13

Sebuah kartu diambil secara acak dari seperangkat kartu brij. Jika E adalah kejadian bahwa kartu yang terambil ialah kartu As dan F adalah kejadian bahwa itu ialah kartu spade, maka E dan F bebas. Ini disebabkan $P(E \cap F) = 1/52$. sedangkan $P(E) = 4/52$ dan $P(F) = 13/52$

Contoh 3.14

Dua keeping uang logam dilemparkan dan keempat hasil percobaan yang mungkin terjadi diasumsikan berpeluang muncul sama. Jika E adalah kejadian munculnya sisi gambar pada uang logam pertama dan f kejadian munculnya sisi angka pada uang logam kedua, maka E dan F bebas, sebab $P(E \cap F) = P(\{(G,A)\}) = ¼$; sedangkan $P(E)$ $P(\{(G,G), (G,A)\}) = ½$ dan $P(F) = P(\{(G,A), (A,A)\}) = ½$

Contoh 3.15

Misalkan kita menggulirkan dua dadu yang setimbang. Misalkan E_1 menyatakan kejadian bahwa jumlah mata yang muncul ialah 6 dan F adalah kejadian munculnya mata 4 pada dadu pertama. Maka

$$P(E_1 \cap F) = P(\{(4,2)\}) = 1/36$$

Sedangkan

$$P(E_1)P(F) = \left(\frac{5}{36}\right)\left(\frac{1}{36}\right) = \frac{5}{216}$$

Diserahkan kepada pembaca untuk menemukan argumentasi secara instuisi mengapa kejadian diperolehnya jumlah mata 7 bebas (tidak tergantung) dari hasil-percobaan pada dadu pertama.

Sekarang akan ditunjukkan bahwa jika E bebas dari F, maka E juga bebas dari F^c.

Proposisi 3.1

Jika E dab F bebas, maka begitu juga dengan E dan F^c.

BUKTI:

Misalkan E dan F bebas. Karena $E = (E \cap F) \cup (E \cap F^c)$, dan $E \cap F$ dan $E \cap F^c$ jelas saling menyisihkan, maka kita peroleh :

$$P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap F^c) = P(E)P(F) + P(E \cap FC)$$

Yang berarti juga

$$P(E \cap F^c) = P(E)\ [1\text{-}P(F)] = P(E)P(F^c)$$

Dan terbuktilah sudah proposisi di atas.

Jadi, bila E bebas dari F, maka peluang terjadinya E tidak berubah dengan adanya informasi apakah F terjadi atau tidak.

Sekarang misalkan E bebas dari F dan juga bebas dari G. Apakah dengan demikian E pasti bebas dari $F \cap G$? Jawabnya ternyata tidak. Simaklah contoh berikut ini.

Contoh 3.16

Dua dadu setimbang digulirkan. Misalkan E adalah kejadian diperolehnya jumlah mata 7. Misalkan F adalah kejadian munculnya mata 4 pada dadu pertama, dan G kejadian munculnya mata 3 pada dadu kedua. Dan contoh 3.15 kita tahu bahwa E bebas dari F, dan dapat pula ditunjukkan bahwa E juga bebas dari G, namun jells bahwa E tidak bebas dari $F \cap G$ [sebab $P(E \backslash F \cap G)=1$]

Dan contoh 3.16 tampak bahwa definisi bagi kebebasan tiga kejadian E, F dan G harus lebih rumit daripada sekedar mengasumsikan bahwa semua $\binom{3}{2}$ pasangan kejadian saling bebas. Perhatikan definisi berikut :

Definisi

Tiga kejadian E, F, dan G dikatakan bebas jika:

$$
\begin{aligned}
P(E \cap F \cap G) &= P(E)P(F)P(G) \\
P(E \cap F) &= P(E)P(F) \\
P(E \cap G) &= P(E)P(G) \\
P(F \cap G) &= P(F)P(G)
\end{aligned}
$$

Perhatikan bahwa jika E, F, dan G bebas, maka E akan bebas dari sembarang kejadian yang terbentuk dari F dan G. sebagai missal, E bebas dari $F \cup G$, karena:

$$
\begin{aligned}
P[E \cap (F \cup G)] &= P[E \cap F) \cup (E \cap G)] \\
&= P(E \cap F) + P(E \cap G) - P(E \cap F \cap G) \\
&= P(E)P(F) + P(E)P(G) - P(E)P(F \cap G) \\
&= P(E)[P(F) + P(G) - P(F \cap G)] \\
&= P(E)P(F \cup G)
\end{aligned}
$$

Tentu saja, kita dapat memperluas lebih jauh definisi kebebasan bagi lebih dan tiga kejadian. Kejadian-kejadian E_1, E_2,….E_n dikatakan bebas jika, untuk setiap himpunan-bagian E_1, E_2,... E_n, $r \leq n$, dan kejadian-kejadian itu.

$P(E_1E_2….E_r)\ P(E_1)\ P(E_2)\ ....P(E_r)$

Terakhir sejumlah takhingga kejadian dikatakan bebas jika setiap terhingga banyaknya himpunan – bagian dari kejadian-kejadian itu bebas.

Adakalanya terjadi bahwa percobaannya terdiri atas serangkaian anak percobaan. Sebagai missal, jika percobaannya terdiri atas pelemparan terus-menerus sekeping uang logam, kita dapat memandang setiap lemparan sebagai satu anak percobaan. Dalam berbagai kasus, seringkali kita dapat menganggap bahwa hasil percobaan dan anak percobaan yang satu tidak berpengaruh pada peluang terjadinya hasil percobaan dan anak-percobaan lainnya. Dalam hal Demikian, kita katakan bahwa anak-anak percobaan itu bebas satu sama lain. Lebih formalnya, kita katakan bahwa anak-anak percobaan itu bebas jika E_1, E_2,…., E_n, ... adalah suatu barisan kejadian yang bebas bilamana E_i adalah suatu kejadian yang terjadinya ditentukan sepenuhnya oleh hasil-percobaan dan anak-percobaan ke-i.

Bila setiap anak percobaan identik satu sama lain, artinya bila setiap anak percobaan mempunyai ruang contoh yang sama dan fungsi peluang yang sama, maka anak-percobaan itu dinamakan tindakan (trial).

Contoh 3.17

Suatu barisan takhingga tindakan-tindakan yang bebas satu sama lain hendak dilakukan. Setiap tindakan menghasilkan keberhasilan dengan peluang p dan kegagalan dengan peluang 1-p. Berapa peluang terjadinya :

1. Sedikitnya 1 keberhasilan dalam n tindakan yang pertama?
2. Tepat k keberhasilan dalam n tindakan yang pertama?
3. Keberhasilan dalam semua tindakan?

Penyelesaian :

Untuk menentukan peluang sedikitnya terjadi satu keberhasilan dalam n tindakan yang pertama, akan lebih mudah bila kita hitung dulu peluang terjadinya kejadian komplemennya, yaitu tidak pernah terjadi keberhasilan dalam n tindakan yang pertama. Bila kita misalkan Ei adalah kejadian terjadinya kegagalan pada tindakan ke-I, maka peluang tidak pernah terjadi keberhasilan ialah, berdasarkan kebebasan antara setiap tindakan.

$P(E_1 \cap E_2 \ldots . \cap En) = P(E_1)P(E_2) \ldots P(E_n)$ (l-p)

Jadi jawaban bagi pertanyaan (1) ialah $1-(l-p)^n$

Untuk menjawab pertanyaan (2), perhatikan suatu barisan tertentu n hasil percobaan pertama yang mengandung k keberhasilan dan n-k kegagalan. Barisan semacam ini, berdasarkan asumsi kebebasan antartindakan, terjadi dengan peluang $p^k (1-p)^{n-k}$. Karena ada sebanyak $\binom{n}{k}$ barisan demikian ini (ada n!/k!(n-k)!

permutasi k keberhasilan n-k kegagalan), maka peluang yang dicari untuk menjawab pertanyaan (2) ialah:

$$P\{\text{tepat k keberhasilan}\} = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Untuk menjawab pertanyaan (3), perhatikan dan (1) bahwa peluang terjadinya semua keberhasilan dalam n tindakan yang pertama ialah:

$$P(E_1^c E_2^c \ldots . E_n^c) = p^n$$

Jadi, dengan menggunakan sifat kekontinuan peluang (Pasal 2.6), kita peroleh peluang yang dicari, yaitu:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i^c\right) = P\left(\lim_{n} \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i^c\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i^c\right)$$

$$= \lim_{n} p^n = \begin{cases} 0 \; jika \; p < 1 \\ 1 \, jika \; p = 1 \end{cases}$$

Akan tetapi,

P(E\F) = 1 P(E\G) = 0 P(E\H) = P(E)

Dua persamaan yang pertama kiranya sudah jelas. Yang ketiga terjadi sebab jika pada tindakan pertama tidak muncul jumlah mata 5 atau 7, maka pada saat itu keadaannya persis sama dengan awal mula permasalahannya; yaitu, peneliti akan terus menggulirkan kedua dadu sampai muncul jumlah mata 5 dan 7. Selain itu, tindakan yang satu bebas dari tindakan yang lain; sehingga hasil percobaan pada tindakan pertama tidak berpengaruh pada pengguliran dadu berikutnya. Karena P(F) = $\frac{4}{36'}$ P(G) = $\frac{6}{36'}$ P(H) = $\frac{26}{36'}$ maka kita peroleh:

$$P(E) = \frac{1}{9} + P(E)\frac{13}{18} \qquad \text{atau } P(E) = \frac{2}{3}$$

Argumentasi yang sama menunjukkan bahwa jika E dan F adalah dua kejadian yang saling menyisihkan dari suatu percobaan, maka, bila dilakukan serangkaian tindakan yang bebas, peluang kejadian E akan terjadi sebelum kejadian F ialah:

$$\frac{P(E)}{P(E)+P(F)}$$

Contoh selanjutnya adalah tentang sebuah masalah terkenal yang diberi nama masalah kebangkrutan penjudi.

Contoh 3.19

Masalah Kebangkrutan Penjudi. Dua penjudi A dan B bertaruh mengenai hasil serangkaian pelemparan sekeping uang logam. Pada setiap lemparan, jika uang logam itu muncul sisi gambar, A menang 1 unit dari B, sedangkan jika uang itu muncul sisi angka, A membayar 1 unit kepada B. mereka melanjutkan pelemparan sampai salah seorang kehabisan uang. Bila lemparan yang satu bebas dari lemparan yang lain dan peluang muncul sisi gambar pada setiap lemparan ialah p, berapa peluang A menang dalam permainan ini jika ia mulai dengan i unit dan B dengan N-i unit?

Penyelesaian:

Misalkan E menyatakan kejadian bahwa A memenangkan permainan, dengan catatan ia mulai dengan i unit dan B dengan N-i unit. Untuk mempertegas kebergantungan pada uang awal yang dimiliki A, misalkan $P_i = P(E)$. Kita akan memperoleh ungkapan bagi P(E) dengan cara mengkondisikan hasil percobaan pada lemparan pertama. Misalkan H adalah kejadian munculnya sisi gambar pada lemparan pertama, maka:

$$
\begin{aligned}
Pi &= P(E) \\
&= P(E\backslash H)P(H) + P(E\backslash H^c)P(H^c) \\
&= pP(EH) + (l-p)\, P(E\backslash H^c)
\end{aligned}
$$

Sekarang, jika lemparan pertama menghasilkan sisi gambar, maka situasi setelah lemparan pertama ialah A mempunyai i + 1 unit dan B mempunyai N – (i + 1). Karena rangkaian lemparan diasumsikan bebas dengan peluang munculnya sisi gambar sebesar p pada setiap lemparan, maka sejak saat itu peluang A memenangkan semua uang persis sama seolah-olah permainan baru dimulai dengan A mempunyai modal awal i + 1 unit dan B N – m (i + 1) unit. Oleh karena itu

$$P(E\backslash H) = P_{1+i}$$

Dan begitu juga,

$$P(E\backslash H^c) = p_{i+1}$$

Jadi, dengan menulis q = l-p, kita memperoleh

$$Pi = pP_{i+1} + qP_{i-1} \qquad i=1,2...,N-1 \qquad (3.6)$$

Dengan memanfaatkan syarat batas $P_0 = 0$ dan $P_N = 1$, sekarang kita akan memecahkan persamaan (3.6).

Karena p + q = 1, persamaan-persamaan ini setara dengan persamaan.

$pP_i + qP_i + qP_i + qP_{i-1}$

atau

$P_{i+1} - P_i = \frac{q}{p}(P_i - P_{i-1})$ i = 1, 2, …., N-1 (3.7)

Oleh karenanya, karena $P_0 = 0$, dan Persamaan (3.7) kita memperoleh:

$$P_2 - P_1 = \frac{q}{p}(P_1 - P_0) = \frac{q}{p} P_1$$

$$P_3 - P_2 = \frac{q}{p}(P_2 - P_1) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 P_1$$

$$P_1 - P_{i-1} = \frac{q}{p}(P_i - P_{i-2}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} P_1$$

$$P_N - P_{N-1} = \frac{q}{p}(P_N - P_{N2}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1} P_1 \qquad (3.8)$$

Penjumlahan i – 1 persamaan yang pertama didalam Persamaan (3.8) menghasilkan :

$$P_i - P_1 = P_1\left[\left(\frac{q}{p}\right)+\left(\frac{q}{p}\right)^2+\ldots+\left(\frac{q}{p}\right)^{i=1}\right] \text{atau}$$

$$P_i = \begin{cases} \dfrac{1-(q/p)'}{1-(q/p)}P_1 & jika\ \dfrac{q}{p}\neq 1 \\ \\ iP_1 & jika\ \dfrac{q}{p}=1 \end{cases}$$

Sekarang, dengan menggunakan kenyataan bahwa $P_N = 1$, kita memperoleh :

$$P_1 = P_i = \begin{cases} \dfrac{1-(q/p)}{1-(q/p)^N}P_N & \text{jika } p\neq \dfrac{1}{2} \\ \\ \dfrac{1}{N} & \text{jika } p=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$P_i = \begin{cases} \dfrac{1-(q/p)'}{1-(q/p)^N} & \text{jika } p\neq \dfrac{1}{2} \\ \\ \dfrac{i}{N} & \text{jika } p=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Misalkan Q_i menyatakan peluang bahwa B mememangkan permainan bila A mulai dengan i unit dan B dengan N-i unit. Maka, berdasarkan kesetangkupan situasi yang dijelaskan diatas dan dengan mengganti p oleh q dan i oleh N-1, kita memperoleh:

$$Q_i = \begin{cases} \dfrac{1-(q/p)^{N-1}}{1-(q/p)^N} P_N & \text{jika } p \neq \dfrac{1}{2} \\ \\ \dfrac{N-i}{N} & \text{jika } p = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Lebih lanjut, karena q = ½ setara dengan p = 1/2, maka kita peroleh bila q ≠ 1/2,

$$P_1 + Q_i = \frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N} + \frac{1-(q/p)^{N-i}}{1-(q/p)^N}$$

$$= \frac{p^N - p^N (q/p)^i}{p^N - q^N} + \frac{q^N - qp^N (p/q)^{N-i}}{q^N - p^N}$$

$$= \frac{p^N - p^{N-1} q^i - q^N - q' \ p^{N-i}}{p^N - q^N}$$

$$= 1$$

Karena hasil ini juga berlaku bila p = q = ½, maka diperoleh:

$P_i + Q_i = 1$

Dalam kata-kata, persamaan ini mengatakan bahwa dengan peluang 1 salah satu A dan B akan memenangkan permainan; atau dengan kata lain, peluang permainan ini berlanjut terus tanpa batas ialah nol. (Pembaca harus hati-hati sebab, secara apriori, ada tiga kemungkinan hasil-percobaan, bukan dua. A menang atau B menang atau permainan ini berlanjut terus tanpa ada yang menang atau kalah. Baru saja kita tunjukkan bahwa kemungkinan yang terakhir ini mempunyai peluang 0)

Sebagai ilustrasi numeric, jika A mulai dengan 5 unit dan B dengan 10 unit, maka peluang A menang ialah 1/3 jika p = ½, dan nilai ini akan meloncat menjadi :

$$\frac{1-(2/3)^5}{1-(2/3)^{15}} = 0{,}87$$

Seandainya p = 0,6.

Suatu kasus khusus dari masalah kebangkrutan penjudi, yang dikenal juga sebagai masalah lamanya permainan (*duration of play*), diajukan kepada matematikawan berkebangsaan. Belanda Christian Huygens oleh matematikawan Perancis Fermat pada 1657. Versi yang dikemukakan, yang dipecahkan oleh Huygens, A dan B masing-masing mulai dengan 12 koin. Permainan ini dimainkan dengan 3 dadu sebagai berikut. Bila jumlah mata yang muncul 11 (tidak perduli siapa pun yang melempar), maka A membayar sekeping koin kepada B. Bila jumlah mata yang muncul 14, B membayar sekeping koin kepada A. Pemain yang kehabisan koin kalah. Karena P (jumlah mata 11) = $\frac{27}{26}$ dan P (jumlah mata 14) = $\frac{15}{216}$, maka dari Contoh 3.18 kita tahu bahwa bagi A ini adalah masalah kebangkrutan penjudi (Contoh 3.19) dengan P = $\frac{15}{42}$, i = 12, N = 24. Bentuk umum masalah kebangkrutan penjudi berhasil dipecahkan oleh matematikawan James Benouli, yang dipublikasikan 8 tahun setelah kematiannya pada 1713.

Contoh berikut mengupas suatu masalah yang mempunyai tempat terhormat di dalam sejarah teori peluang. Masalah yang terkenal ini ialah *problem of points*. Dalam bentuk yang paling luas, masalahnya ialah sebagai berikut: Dua pemain memasang taruhan dan memainkan suatu permainan, pemenang permainan memenangkan taruhan. Suatu interupsi menghentikan permainan sebelum ada yang menang, namun masing-masing pemain telah memperoleh semacam "skor parsial". Bagaimana-taruhan tersebut harus dibagi?

Masalah ini dikemukakan kepada matematikawan Perancis Pascal pada 1654 oleh Chevalier de Mere, yang ketika itu sudah menjadi penjudi professional. Ketika memecahkan masalah ini, Pascal memperkenalkan gagasan penting bahwa proporsi hadiah yang patut diperoleh oleh masing-masing pemain harus tergantung pada peluangnya untuk memenangkan permainan seandainya permainan ini dilanjutkan. Pascal mengerjakan beberapa kasus khusus, dan yang lebih penting lagi, ia melakukan korespondensi dengan matematikawan Perancis yang terkenal Fermat, yang telah memiliki reputasi besar sebagai matematikawan. Hasil korespondensi ini tidak hanya terpecahkannya secara lengkap problem of points, namun juga menciptakan kerangka bagi penyelesaian masalah-masalah yang lain ada kaitannya dengan permainan peluang. Korespondensi yang terkenal ini, yang oleh sebagian dianggap sebagai hari lahirnya teori peluang, juga sangat penting dalam merangsang minat terhadap peluang diantara para matematikawan di Eropa, sebab Pascal dan Fermat keduanya telah terkenal sebagai matematikawan terkemuka pada zamannya. Sebagai missal, dalam waktu singkat setelah korespondensi mereka, genus muda dan Belanda Huygens datang ke

Paris untuk membahas masalah tersebut berikut pemecahannya; dan minat serta kegiatan dalam bidang baru ini tumbuh sangat cepat.

Contoh 3.20

Problem of the points. Suatu percobaan terdiri atas tindakan-tindakan bebas, dengan peluang keberhasilan p dan peluang kegagalan 1 – p. Berapa peluang terjadinya n keberhasilan sebelum m kegagalan? Bila kita membayangkan A dan B sebagai sedang memainkan suatu permainan dengan A memperoleh 1 point bila keberhasilan yang muncul dan B memperoleh 1 point bila kegagalan yang muncul, maka peluang yang dicari adalah peluang A menang jika permainan ini dilanjutkan dalam posisi A membutuhkan n point dan B membutuhkan m point untuk memenangkan permainan.

Penyelesaian:

Disini akan diberikan dua solusi. Yang pertama berasal dari Fermat dan yang kedua dari Pascal.

Misalkan adalah peluang bahwa n keberhasilan terjadi sebelum m kegagalan. Dengan mengkondisikan terhadap hasil percobaan pada tindakan pertama, kita memperoleh (mengapa?).

$$P_{n,m} = pP_{n-n,m} + (1-p)P_{n,m-n} \qquad n \geq 1, m \geq 1$$

Dengan menggunakan syarat batas $P_{n,0}$ dan $P_{0,m} = 1$ persamaan-persamaan ini dapat diselesaikan untuk memperoleh $P_{n,m}$. Alih-alih menceburkan diri kedalam rincian yang rumit, marilah kita tengok ke solusi menurut Pascal.

Pascal menalar bahwa agar n keberhasilan terjadi sebelum m kegagalan, maka syarat perlu dan cukup ialah terjadinya sedikitnya n keberhasilan didalam m + n -1 tindakan yang pertama. (Bahkan seandainya pun permainan dihentikan sebelum m + n - 1 tindakan, kita masih dapat membayangkan dilakukannya tindakan tambahan yang diperlukan? Ini memang benar, sebab jika sedikitnya terjadi n keberhasilan dalam m + n – 1 tindakan yang pertama, paling banyak terjadi m-1 kegagalan didalam m + n = 1 tindakan tersebut; jadi n keberhasilan akan terjadi sebelum m kegagalan. Di pihak lain, jika terjadi kurang dari n keberhasilan didalam m + n – 1 tindakan yang pertama, maka sedikitnya telah terjadi m kegagalan; jadi n keberhasilan tidak akan terjadi sebelum m kegagalan.

Oleh karenanya, karena peluang terjadinya tepat k keberhasilan dalam m + n – 1 tindakan ialah, sebagaimana telah ditunjukkan di dalam contoh 3.17.

$$\binom{\mathrm{m}+\mathrm{n}-1}{\mathrm{k}} p^k (1-p)^{m+n-1-k}$$

maka peluang terjadinya n keberhasilan sebelum m kegagalan ialah

$$P_{n,m} = \binom{\mathrm{m}+\mathrm{n}-1}{\mathrm{k}} p^k (1-p)^{m+n-1-k}$$

Penyelesaian lain bagi problem of points disajikan didalam Soal Latihan Teoritis 11. Sebagai ilustrasi Problem of the points misalkan dua pemain masing-masing mempertaruhkan \$A dan masing-masing berpeluang sama untuk memenangkan setiap point (p =

$\frac{1}{2}$). Jika n point dibutuhkan untuk menang dan pemain pertama mempunyai 1 point sedangkan pemain kedua belum memperoleh point, maka pemain yang pertama memperoleh.

$$2AP_{n-1,n} = 2A\sum_{k=n-1}^{2n-2}\binom{2n-2}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}$$

Sekarang,

$$\sum_{k=n-1}^{2n-2}\binom{2n-2}{k} = \sum_{k=n-1}^{2n-2}\binom{2n-2}{2n-2-k}$$

Identitas yang terakhir ini diperoleh melalui substitusi i = 2n-2-k. Jadi,

$$2\sum_{k=n-1}^{2n-2}\binom{2n-2}{k} = \sum_{k=0}^{2n-2}\binom{2n-2}{k} + \binom{2n-2}{n-1} = (1+1)^{2n-2}$$

$$\binom{2n-2}{n-1}$$

sehingga pemain pertama memperoleh

$$A\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}\binom{2n-2}{n-1}\right]$$

3.5 P (.IF) Adalah Suatu Fungsi Peluang

Peluang bersyarat memenuhi semua sifat peluang biasa. Ini dibuktikan oleh Proposisi 3.2, yang menunjukkan bahwa P(E\F) memenuhi ketiga aksioma peluang.

Proposisi 3.2

(a) $0 \leq P(E\backslash F) \leq 1$

(b) $P(S\backslash F) = 1$

Jika E, i = 1, 2,…. Adalah kejadian-kejadian yang saling menyisihkan, maka $P\left(\overset{\infty}{\underset{1}{\cup}} Ei \setminus F \right) = \sum_{1}^{\infty} P(Ei \setminus F)$

BUKTI : Untuk membuktikan (a), kita harus menunjukkan bahwa $0 \leq P(E \cap F)/P(F) \leq 1$. Ruas kiri ketidaksamaan ini sudah jelas, sedangkan ruas kanannya merupakan akibat dari $(E \cap F) \subset F$, yang berimplikasi bahwa $P(E \cap F) \leq P(F)$.

Bagian (b) terbukti sebab

$$P(S \setminus F) = \frac{P(S \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F)}{P(F)} = 1$$

Bagian (c) terbukti sebab

$$P\left(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} E_i F \right) = \frac{P\left(\left(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} E_i \right) \cap F \right)}{P(F)}$$

$$= \frac{P\left(\overset{\infty}{\underset{1}{\cup}} E_i \cap F \right)}{P(F)}$$ karena $\left(\overset{\infty}{\underset{1}{\cup}} E_i \right) F = \overset{\infty}{\underset{1}{\cup}} (E_i \cap F)$

$$= \frac{\sum_{1}^{\infty} P(E_i \cap F)}{P(F)}$$

$$= \sum_{1}^{\infty} P(E_i \cap F)$$

Da1am hal ini kesamaan terakhir merupakan akibat dan kenyataan bahwa $E_i \cap E_j = \phi$ berimplikasi bahwa $E_i \cap F \cap E_j \cap F = \phi$.

Bila kita definisikan Q(E)=P(E\F), maka dari Proposisi 3.2 kita dapat memandang Q(E) sebagai suatu fungsi peluang dan kejadian-kejadian yang merupakan himpunan-bagian dari S. Oleh karenanya semua proposisi tentang peluang yang telah dibuktikan sebelumnya berlaku untuk Q(E). Sebagai missal, kita memperoleh

$Q(E_1 \cup E_2 = Q(E_1) + Q(E_2) - Q(E_1 \cap E_2)$

yaitu setara dengan

$P(E_1 \cup E_2 \setminus F) = P(E_1|F) + P(E_2|F) - P(E_1 \cap E_2|F)$

Selain itu, bila kita definisikan peluang bersyarat $Q(E_1\setminus E_2)$ sebagai $Q(E_1\setminus E_2) = Q(E_1\setminus E_2) = Q(E_1 \cap E_2)/Q(E_2)$, maka dari Persamaan (3.2) kita peroleh bahwa:

$$Q(E_1) = Q(E_1|E_2)Q(E_2) + Q(E_1|E_2^c)Q(E_2^c) \qquad (3.9)$$

Karena:

$$Q(E_1|E_2 = \frac{Q(E_1 \cap E_2}{(E_2)} = \frac{P(E_1 \cap E_2|F)}{P(E_2|F)} =$$

$$\frac{P(E_1 \cap E_2 \cap F)/P(F)}{P(E_2 \cap F)/P(F)} = P(E_1|E_2 \cap F)$$

Kita lihat bahwa Persamaan (3.9) setara dengan :

$$P(E_1|F) = P(E_1|E_2 \cap F)P(E_2|F) + P(E_1|E_2^c \cap F)P(E_2^c|F)$$

Contoh 3.21

Perhatikan contoh 3.6, yang berkaitan dengan sebuah perusahaan asuransi yang percaya bahwa orang terbagi atas dua kelompok yang cenderung mengalami kecelakaan dan yang tidak. Sepanjang sembarang tahun tertentu, orang yang cenderung mengalami kecelakaan akan mengalami kecelakaan dengan peluang ,.4, sedangkan peluang itu bagi yang tidak cenderung mengalami kecelakaan ialah sebesar 0,2. Berapa peluang bersyarat bahwa seorang pemegang polis baru akan kecelakaan pada tahun kedua sejak ia membeli polis tersebut, bila diketahui ia mengalami kecelàkaan pada tahun pertamanya?

Penyelesaian : Jika kita misalkan A adalah kejadian bahwa pemegang polis itu seorang yang cenderung mengalami kecelakaan, dan A_i, i=1,2, adalah kejadian bahwa ia mengalami kecelakaan pada tahun ke-I, maka peluang yang dicari, $P(A_2|A_1)$ dapat diperoleh dengan cara mengkondisikan apakah ia cenderung mengalami kecelakaan atau tidak :

$$P(A_2|A_1) = P(A_2 \setminus A \cap_1) P(A \setminus A_1) + P(A_2 \setminus A^c \cap A_1) P(A^c \setminus A_1)$$

sekarang,

$$P(A|A_1) = \frac{P(A_1 \cap A)}{P(A_1)} = \frac{P(A_1|A)P(A)}{P(A_1)}$$

Akan tetapi, P(A) diasumsIkan sama dengan 3/10, dan telah ditunjukkan dalam Contoh 3.6 bahwa $P(A_1)$ 0.26. Oleh karenanya:

$$P(A|A_1) = \frac{(0.4)(0.3)}{0.26} = \frac{6}{13}$$

sehingga

$$P(A^c|A_1) = 1 - P(A|A_1) = \frac{7}{13}$$

Karena $P(A_2|A \cap A_1) = 0.4$ dan $P(A_2|A^c \cap A_1) = 0.2$, maka kita peroleh

$$P(A_2|A_1) = (0.4)(\frac{6}{13}) + (0.2)(\frac{7}{13}) \approx 0.29$$

Contoh berikut berkaitan dengan suatu masalah dalam teori runtutan (*theory of runs*)

Contoh. 3.22

Suatu percobaan yang terdiri atas tindakan-tindakan bebas dilakukan. Masing-masing tindakan menghasilkan keberhasilan dengan peluang p atau kegagalan dengan peluang q = 1-p. Kita tertarik untuk menghitung peluang terjadinya suatu runtunan n keberhasilan berturut-turut sebelum suatu runtunan m kegagalan berturut-turut.

Penyelesaian : Misalkan E adalah kejadian bahwa suatu runtunan n keberhasilan terjadi sebelum suatu runtunan m kegagalan. Uutuk memperoleh P(E), kita mulai dengan mengkondisikan terhadap hasil percobaan pada tindakan pertama. Artinya, misalkan H adalah kejadian terjadinya keberhasilan pada tindakan pertama. Maka kita memperoleh:

$$P(E) = pP(E\backslash H) + qP(E\backslash H^c) \qquad (3.10)$$

Selanjutnya, seandainya tindakan pertama telah menghasilkan keberhasilan, suatu cara untuk memperoleh suatu runtunan n keberhasilan sebelum suatu runtunan m kegagalan ialah memperoleh keberhasilan dalam semua n-1 tindakan berikutnya. Oleh karenanya, kita akan mengkondisikan apakah hal itu terjadi atau tidak. Artinya, dengan memisahkan F sebagai kejadian bahwa tindakan ke 2 sampai tindakan ke-n semuanya menghasilkan keberhasilan, kita memperoleh:

$$P(E\backslash H) = P(E\backslash F\cap H)P(F\backslash H) + P(E\backslash F^c\cap R)P(F^c\backslash H) \qquad (3.11)$$

Jadi bahwa $P(E|F \cap H) =$ 1; sebaliknya, jika kejadian $F^c \cap H$ terjadi, maka tindakan pertama akan menghasilkan keberhasilan, namun pada suatu ketika selama n-1 tindakan berikutnya akan terjadi suatu kegagalan. Namun bila kegagalan ini terjadi, ini akan menghapus semua keberhasilan sebelumnya sehingga situasinya persis sama seperti seolah-olah kita mulai dengan suatu kegagalan. Oleh karenanya

$$P(E\backslash F^c\cap H) = P(E\backslash H^c)$$

Karena bebasnya tindakan yang satu dari tindakan lainnya berimplikasi bahwa F dan H bebas, dan karena $P(F)=p^{n-1}$, maka dan Persamaan (3.11) kita memperoleh :

$P(E\backslash H)p^{n-1} = (1-p^{n-1})P(E\backslash H^c)$ (3.12)

Sekarang kita akan memperoleh suatu ungkapan bagi $P(E\backslash H^c)$ dengan cara yang sama. Misalkan G adalah kejadian bahwa tindakan ke-2 sampai ke-m semuanya menghasilkan kegagalan Maka :

$P(E\backslash H^c) = P(E\backslash G\cap H^c)P(G\backslash H^c)+P(E\backslash G^c\cap H)P(G^c\backslash H^c)$ (3.13)

Sekarang, $G\cap H^c$ adalah kejadian bahwa m tindakan yang pertama semuanya menghasilkan kegagalan namun sebaiknya terjadi satu keberhasilan dalam m-1 tindakan berikutnya. Oleh karena itu, karena ini menghapus semua kegagalan sebelumnya, kita memperoleh bahwa:

$P(E\backslash G^c\cap H^c) = P(E\backslash H)$

Selanjutnya, karena $P(G^c\backslash H)$ $P(G^c) = 1-q^{m-1}$, dari Persamaan (3.13) kita memperoleh

$P(G\backslash H^c) = (1-q^{m-1})P(E\backslash H)$ (3.14)

Penyelesaian Persamaan (3.12) dan (3.14) menghasilkan

$$P(E\backslash H) = \frac{p^{n-1}}{p^{n-1}+q^{m-1}-p^{n-1}q^{m-1}}$$

dan

$$P(E\backslash H) = \frac{(1-q^{m-1})p^{n-1}}{p^{n-1}+q^{m-1}-p^{n-1}q^{m-1}}$$

sehingga

$$\begin{aligned} P(E) &= pP(E\backslash H) + qP(E\backslash H^c) \\ &= \frac{p^n + qp^{n-1}(1-q^{m-1})}{p^{n-1}+q^{m-1}-p^{n-1}q^{m-1}} \end{aligned}$$

$$= \frac{p^{n-1}(1-q^m)}{p^{n-1}+q^{m-1}p^{n-1}q^{m-1}}$$

Menarik untuk dicatat bahwa, berdasarkan kesetangkupan masalahnya, peluang memperoleh suatu runtunan m kegagalan sebelum suatu runtunan n keberhasilan akan diberikan oleh persamaan (3.15) dengan p dan q saling dipertukarkan dan n dan m juga saling dieprtukarkan. Oleh karenanya peluang ini akan sama dengan P {runtunan m kegagalan sebelum suatu runtunan n keberhasilan)

$$\frac{p^{n-1}(1-q^n)}{p^{m-1}+q^{n-1}p^{m-1}q^{m-1}} \tag{3.16}$$

Karena jumlah persamaan (3.15) dan (3.16) sama dengan 1, maka dengan peluang 1 pada akhirnya akan terjadi suatu runtunan n keberhasilan atau suatu runtunan m kegagalan.

Sebagai ilustrasi Persamaan (3.16), kita catat bahwa dalam pelemparan sekeping uang logam setimbang peluang bahwa suatu runtunan 2 sisi gambar akan mendahului suatu runtunan 2 sisi angka ialah 3/10, untuk runtunan 2 sisi gambar sebelum runtunan 4 sisi angka peluang ini naik menjadi 5/6.

Dalam contoh kita berikutnya, kita akan kembali ke masalah. perpadanan Montmort (Contoh 2.13, Bab 2), namun kali ini kita akan memperoleh suatu solusi dengan menggunakan peluang bersyarat.

Contoh 3.23

Pada sebuah pesta n laki-laki melepaskan topinya. Topi-topi itu dicampur aduk dan kemudian setiap laki-laki tadi mengambil satu topi secara acak. Kita katakan terjadi suatu perpadanan bila seorang laki-laki berhasil memperoleh kembali topinya.

(1) Berapa peluang tidak terjadi satu pun perpadanan.?

(2) Berapa peluang terjadi tepat k perpadanan?

Penyelesaian Misalkan E adalah kejadian tidak terjadinya satu pun perpadanan, dan agar kebergantungan pada n lebih jelas, kita tulis $P_n = P(E)$. Kita mulai dengan mengkondisikan pada apakah orang pertama berhasil memperoleh topinya sendiri atau tidak namakan kejadian-kejadian ini M dan M^c, maka

$$P_n = P(E) = P(E\backslash M)P(M)+P(E\backslash M^c)P(M^c)$$

Jelaslah bahwa $P.E\backslash M) = 0$, sehingga

$$P_n = p(E\backslash M^c) = \frac{n-1}{n} \qquad (3.17)$$

Sekarang, $P(E\backslash M)$ sama dengan peluang tidak terjadi perpadanan bila n-1 orang laki-laki mengambil topi dan sejumlah n-1 topi yang didalamnya tidak terdapat topi milik salah seorang dari laki-laki itu, namakan laki-laki ini A. Ini bisa terjadi dalam dua cara yang saling menyisihkan, yaitu tidak terjadi perpadanan dan A tidak memperoleh topi ekstra (topi milik orang yang memilih pertama), atau tidak ada perpadanan dan A memperoleh topi ekstra. Peluang kejadian pertama dan kedua kejadian ini ialah P_{n-1}, yaitu dengan menganggap topi ekstra sebagai "milik" A. Karena kejadian kedua mempunyai peluang $[1/(n-1)]P_{n-1}$, kita memperoleh.

$$P(E\backslash M^c) = P_{n-1} + \frac{1}{n-1} P_{n-2}$$

Sehingga, berdasarkan persamaan (3.17)

$$P_n = \frac{n-1}{n} P_{n-1} + \frac{1}{n} P_{n-2}$$

yang setara dengan

$$P_n - P_{n-1} = -\frac{1}{n}(P_{n-1} - P_{n-2})$$

Akan tetapi, karena P adalah peluang tidak terjadi pemadanan bila n orang memilih secara acak sebuah topi diantara topi-topi milik mereka sendiri, maka

$P_1 = 1 \quad P_2 = ½$

Sehingga, berdasarkan Persamaan (3.18),

$$P_3 - P_2 = \frac{(P_2 - P_1)}{3} = -\frac{1}{3!} \qquad \text{atau } P_3 = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}$$

$$P_4 - P_3 = -\frac{(P_3 - P_2)}{4} = -\frac{1}{4!} \text{ atau } P_4 = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$$

Dan secara umum, kita memperoleh:

$$P_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots\ldots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

Untuk memperoleh peluang tepat k perpadanan, perhatikan suatu grup k orang tertentu yang tetap (*fixed*). Peluang hanya mereka yang memperoleh kembali topinya ialah

$$\frac{1}{n}\frac{1}{n-1}\cdots\frac{1}{n-(k-1)}P_{n-k}=\frac{(n-k)!}{n!}P_{n-k}$$

Dalam hal ini P adalah peluang bersyarat bahwa diantara n-k orang lainnya, yang mengambil topi diantara topi-topi mereka sendiri, tidak terjadi perpadanan. Karena ada sebanyak $\binom{n}{k}$ cara memilih k maka peluang terjadi tepat k perpadanan ialah:

$$\frac{P_{n-k}}{k!} = \frac{\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}}{k!}$$

Suatu gagasan penting didalam teori peluang ialah kebebasan bersyarat. Kita katakan kejadian E_1 dan kejadian E_2 bebas bersyarat bila diketahui F jika peluang bersyarat terjadinya E_1 tidak berubah. oleh adanya informasi apakah E_2 terjadi atau tidak. Secara formal, E_1 dan E_2 dikatakan bebas bersyarat jika diketahui F telah terjadi jika

$$P(E1|E2\cap F) = P(E_1|F) \tag{3.19}$$

Yang setara dengan

$$P(E_1\cap E_2|F) = P(E_1|F)P(E2|F) \tag{3.2.0}$$

Gagasan kebebasan bersyarat dengan mudah dapat diperluas ke lebih dari dua kejadian dan ini disediakan sebagai latihan.

Pembaca yang jeli dapat melihat bahwa gagasan kebebasan bersyarat secara implicit telah digunakan didalam Contoh 3.21. Di situ secara implicit diasumsikan bahwa kejadian-kejadian seorang pemegang polis mengalami kecelakaan (atau pun tidak cenderung mengalami kecelakaan pada tahun kei, i=1.,2...., bebas bersyarat jika diketahui ia cenderung mengalami kecelakaan (ataupun tidak cenderung mengalami kecelakaan). (Hal ini digunakan untuk menghitung $P(A_2|A \cap A_1)$ dan $P(A_2|A^c \cap A_1)$, yang nilainya masing-masing ialah 0.4 dan 0.2) Contoh berikut, yang kadang-kadang dinamakan kaidah penggantian Laplace (*Laplace's rule of succession*), mengilustrasikan lebih lanjut gagasan kebebasan bersyarat.

Contoh3.2A

Kaidah penggantian Laplace. Didalam sebuah kotak terdapat k + 1 uang logam yang tidak setimbang. Uang logam ke-i, bila dilemparkan, menghasilkan sisi gambar dengan peluang i/k, i=0,1…….., k. Sekeping uang logam yang diambil secara acak dari kotak tersebut dan kemudian dilempar berulang-ulang. Jika n lemparan yang pertama semuanya menghasilkan sisi gambar, berapa peluang bersyarat bahwa lemparan yang ke-n (n+1) juga akan memberikan hasil yang sama?

Penyelesaian:

Misalkan E_i menyatakan kejadian terambilnya uang logam ke-i, i = 0,1,….., k, misalkan F_n menyatakan kejadian bahwa n lemparan yang pertama semuanya menghasilkan sisi gambar, dan misalkan F adalah kejadian munculnya sisi gambar pada lemparan ke (n+1). Peluang yang dicari, P(F|F), dapat dihitung sebagai berikut:

$$P(F|F_n) = \sum_{i=0}^{k} P(F|F_n \cap E_i)(E_i \setminus F_n)$$

Selanjutnya, jika uang logam ke-i diketahui terambil, maka beralasan untuk mengasumsikan bahwa hasil-hasil percobaannya akan bebas bersyarat dan peluang munculnya sisi gambar pada setiap lemparan adalah i/k. Oleh karenanya

$$P(F|F_n \cap E_i) = P(F|E_i) = \frac{i}{k}$$

Selain itu

$$P(E_i|F_n) = \frac{F(E_i \cap F_n)}{P(F_n)} = \frac{P(F_n|E_i)P(E_i)}{\sum_{j=0}^{k} P(Fn|E_j)P(E_j)}$$

$$= \frac{(i/k)^n[1/k+1)]}{\sum_{j=0}^{k}(j/k)^n[1/(k+1)]}$$

sehingga

$$P(F|F_n) = \frac{\sum_{i=0}^{k}(i/k)^{n+1}}{\sum_{j=0}^{k}(j/k)^n}$$

Namun untuk nilai k yang besar, kita .dapat menggunakan hampiran integral

$$\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{i}{k}\right)^{n+1} \approx \int_0^1 x^{n+1}dx = \frac{1}{n+2}$$

$$\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{j}{k}\right)^{n+1} \approx \int_{0}^{1} x^{n+1}dx = \frac{n+1}{n+2}$$

Soal Latihan Teoritis

1. Asumsikan berlakunya hukum bilangan besar Bernoulli; hukum ini mengatakan bahwa jika suatu percobaan diulang terus-menerus dibawah kondisi yang persis sama, maka, dengan peluang sebesar 1, proporsi terjadinya kejadian E akan sama dengan P(E). Sekarang perhatikan ulangan-ulangan percobaan itu yang hasil percobaannya merupakan sebuah titik di dalam F. Tunjukkan, dengan peluang 1, bahwa proporsi ulangan-ulangan percobaan tadi yang hasil percobaannya juga ada didalam E akan sama dengan P(F|F).
2. Buktikan bahwa jika $P(E_i|E_1 \cap \ldots\ldots \cap E_{i-1}) > 0.$, i = 1,.....,n, maka

$$PE_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1 \cap E_2)\ldots P(E_n|E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_{n-1})$$

3. Sebuah kelereng ada di dalam salah satu dan n kantung. Peluang kelereng ini ada di dalam kantung ke-i ialah Pi. Jika kelereng ini adalah didalam kantung ke-i, pencarian di dalam kantung ini akan menemukannya dengan peluang αi. Tunjukkan bahwa peluang bersyarat bahwa kelereng ada didalam kantung ke-j, bila pencarian didalam kantung ke-1 tidak nenemukannya, ialah:

$\dfrac{P_j}{1-\alpha_i P_i}$ Jika j $\neq$ i

$\dfrac{(1-\alpha_i)P_i}{1-\alpha_i P_i}$ Jika j = i

4. Buktikan kalau pernyataan-pernyataan berikut benar atau berikan contoh-contoh kalau pernyataan-pernyataan tersebut salah

   (a) Jika E bebas dari F dan E bebas dari G, maka E bebas dari F$\cup$G.

   (b) Jika E bebas dari F dan E bebas dari G, dan F$\cap$G = $\emptyset$, maka E bebas dan F$\cup$G.

   (c) Jika E bebas dari F, dan F bebas dari G, dan E bebas dari F$\cap$G, maka G bebas dari E$\cap$F.

   (d) Jika E bebas dari F, dan F bebas dari G, dan E bebas dari F$\cap$G, maka G bebas dari E$\cup$G.

5. Suatu kejadian dikatakan informasi negatif nentang kejadian E, dan ditulis $F \downarrow F$ jika

   P(E|F) < P(E)

   Untuk setiap pernyataan berikut, buktikan jika benar atau berikan contoh tandingan jika salah:

   (a) Jika F $\downarrow$ E maka E $\downarrow$ F)

   (b) Jika F $\downarrow$ E dan E $\downarrow$ G, maka F$\cap$G $\downarrow$ E

   (c) Jika F $\downarrow$ E dan G $\downarrow$ E, maka (F$\cap$G) $\downarrow$ E

   Ulangi butir (a), (b), dan (c) bila $\downarrow$ diganti oleh $\uparrow$, dalam pengertian bahwa F membawa informasi positif tentang E, ditulis F $\uparrow$ E, jika P(E|F) $\geq$ P(E).

6. Misalkan bahwa $\{E_n, n \geq 1\}$ dan $\{F_n, n \geq 1\}$ adalah barisan-barisan naik dengan limit masing-masing E dan F. Tunjukkan bahwa jika E_n bebas dari F_n untuk semua n, maka E bebas dari F.

7. Buktikan bahwa jika $E_1, E_2, \ldots E_n$ adalah kejadian-kejadian yang bebas, maka

   $P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n = 1 - [1 - P(E_1)][1 - P(E_2)]\ldots[1 - P(E_n)]$

8. Jika $0 \leq \alpha_1 \leq 1$, i = 1,2, …., tunjukkan bahwa.

   $$\sum_{i=1}^{\infty}\left[a_i \prod_{j=1}^{i-1}(1-a_j\right] + \prod_{i=1}^{\infty}(1-a_i) = 1$$

   Petunjuk: Misalkan sejumlah takhingga uang logam dilemparkan. Misalkan a_i adalah peluang bahwa uang logam ke-i menghasilkan sisi gambar.

9. Peluang memperoleh sisi gambar pada pelemparan sekeping uang logam ialah p. Misalkan A mulai lebih dulu dan melempar terus sampai diperoleh sisi gambar. Kemudian ganti B yang melemparkan terus sampai diperoleh sisi angka, untuk kemudian ganti A lagi yang melempar, dan demikian seterusnya. Misalkan $P_{n,m}$ menyatakan peluang bahwa A mengumpulkan total n sisi gambar sebelum B mengumpulkan m sisi angka. Tunjukkan bahwa

   $P_{n,m} = pP_{n-1,m} + (1+P)(1-P_{m,n})$

10. Misalkan bahwa anda berjudi melawan seseorang yang kekayaannya tak terhingga dan pada setiap tahap anda menang atau kalah 1 satuan masing-masing dengan peluang p dan 1-p. Tunjukkan

bahwa peluang pada akhirnya anda akan bangkrut ialah:

1 jika $p \leq ½$

$1-(q/p)^1$ jika $p > ½$ dengan $q = 1 - p$

dalam hal ini i adalah uang awal yang anda miliki.

11. Suatu percobaan yang terdiri atas tindakan-tindakan bebas, dengan peluang keberhasilan p pada setiap tindakan, dilaksanakan sampai diperoleh r kali keberhasilan. Tunjukkan bahwa peluang hal itu bisa dicapai dalam tepat n kali tindakan ialah

$$\binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$$

Gunakan hasil ini untuk memecahkan *problem of the points* (contoh 3.20).

12. Tindakan-tindakan yang menghasilkan keberhasilan dengan peluang p dan kegagalan dengan peluang 1-p dinamakan tindakan Bernoulli. Misalkan P_n menyatakan peluang bahwa n tindakan Bernoulli menghasilkan sejumlah genap keberhasilan (0 dianggap genap). Tunjukkan bahwa:

$P_n = p(1-P_{n-1}) + (1-p)P_{n-1} \quad n \geq 1$

Kemudian gunakan ini untuk membuktikan (melalui induksi matematis) bahwa :

$$P_n = \frac{1+(1-2p)^n}{2}$$

13. Misalkan Q_n, menyatakan peluang bahwa di dalam n lemparan sekeping uang logam setimbang tidak pernah terjadi sisi gambar muncul 3 kali berturut-turut. Tunjukkan bahwa:

$$Q_n = \frac{1}{2}Q_{n-1} + \frac{1}{4}Q_{n-2} + \frac{1}{8}Q_{n-3}$$

$Q_0 = Q_1 = Q_2 = 1$

Tentukan Q_8

14. Jika A mempunyai n + 1 dan B mempunyai n uang logam setimbang, dan kemudian mereka melemparkan uang mereka sendiri, tunjukkan bahwa peluang A memperoleh lebih banyak sisi gambar daripada B ialah ½.

    Petunjuk: Kondisikan pada siapa yang memperoleh lebih banyak sisi gambar setelah masing-masing melempar n uang logam (ada tiga kemungkinan)

15. Perhatikan masalah kebangkrutan penjudi namun kali ini dengan kesepakatan bahwa A dan B tidak akan bermain lebih daripada n kali permainan. Misalkan $P_{n,I}$ menyatakan peluang bahwa A memenangkan semua uang milik B bila A mulai dengan uang sejumlah i dan B dengan N-I. Turunkan suatu persamaan bagi $P_{n,I}$ yang dinyatakan sebagai fungsi daripada $P_{n-1,i-1}$ dan kemudian hitunglah $P_{1,3}$ untuk N=5

16. Ada dua kantung, masing-masing berisi sejumlah kelereng hitam dan putih. Peluang memperoleh kelereng putih dan kantung pertama dan kedua masing-masing ialah p dan p^i. Kelereng diambil

secara sekuensial dengan pemulihan sebagai berikut : Dengan peluang a kelereng pertama diambil dari kantung pertama, sedangkan peluang kereleng pertama diambil dari kantong kedua ialah 1-α. Kelereng-kelereng berikutnya diambil menurut aturan bahwa bilamana kelereng pertama yang terambil (dan kemudian dikembalikan) berwarna putih, kelereng berikutnya diambil dari kantung yang sama; namun bila yang terambil kelereng hitam, kelereng berikutnya diambil dari kantung yang lain. Misalkan menyatakan peluang bahwa kelereng ke-n terambil dari kantung pertama. Tunjukkan bahwa:

$\alpha_{n+1} = \alpha_n\,(p+p^{i-1}) + 1-p^i \qquad n \geq 1$

dan gunakan ini untuk membuktikan bahwa

$$\alpha_n = \frac{1-p^i}{2-p-p^i} + \left(\alpha - \frac{1-p^i}{2-p-p^i}\right)(p+p^i-1)^{n-1}$$

Misalkan P_n menyatakan peluang bahwa kelereng ke-n yang terambil berwarna putih. Tentukan P_n. Selain itu hitung jugalah $\lim_{n\to\infty} \alpha_n$ dan $\lim_{n\to\infty} P_n$,

17. Sebuah kantung berisi n kelereng putih dan m kelereng hitam. Kelereng diambil satu demi satu sampai yang tertinggal di dalam kantung hanya kelereng yang berwarna sama. Tunjukkan bahwa dengan pe1uang sebesar n(n+m) yang tertinggal ialah kelereng putih semua.

    Petunjuk: Misalkan $P_{n,m}$ adalah peluang yang dicari. Tunjukkan bahwa :

$$P_{n,m} = \frac{n}{n+m} P_{n-1,m} + \frac{m}{n+m} P_{n,m-1}$$

Gunakan induksi terhadap k = n + m untuk membuktikan pertanyaan semula.

18. Sebagai suatu model peramalan cuaca yang sederhana, misalkan bahwa cuaca besok (basah atau kering) akan sama dengan cuca hari ini dengan peluang p. Jika ada 1 Januari terjadi cuaca basah, tunjukkan bahwa P, peluang bahwa n hari kemudian cuaca juga akan basah, memenuhi persamaan

    $P_n = (2p - 1)P_{n-1} + (1-p) \qquad n \geq 1$

    $P_0 = 1$

    Buktikan bahwa

    $P_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n \qquad n \geq 0$

19. Sebuah kantuug berisi a kelereng putih dan b kelereng hitam. Kelereng diambil dari kantung tersebut dengan aturan sebagai berikut :

    (a) Sebuah kelereng diambil secara acak dan kemudian disisihkan.

    (b) Kemudian diambil kelereng yang kedua. Bila warnanya berbeda dari kelereng sebelumnya, kelereng ini dikembalikan ke dalam kantung dan proses diulang kembali dari awal lagi. Bila warnanya sama, kelereng ini disisihkan dan dimulai lagi dari (b).

Dengan kata lain kelereng diambil dan disisihkan sampai diperoleh yang berbeda warnanya. Dalam hal dicapai keadaan yang terakhir ini kelereng dikembalikan kedalam kantung dan proses diulang kembali. Misalkan $P_{a,b}$ menyatakan peluang bahwa kelereng terakhir didalam kantung berwarna putih. Buktikan bahwa

$P_{a,b} = ½$

Petunjuk: Gunakan induksi terhadap k = a + b.

20. Buktikan secara langsung bahwa

    $P(E\backslash F) = P(E\backslash F \cap G)P(G\backslash F) + P(E\backslash F \cap G^c)P(G^c\backslash F)$

21. Buktikan bahwa Persamaan (3.19) setara dengan Persamaan (3.20).

22. Perluas definisi kebebasan bersyarat untuk 2 atau lebih kejadian.

23. Buktikan atau berikan contoh tandingan. Jika E_1 dan E_2 bebas, maka kedua kejadian bebas bersyarat jika diketahui kejadian F telah terjadi.

24. Didalam kaidah penggantian Laplace .(Contoh 3.24) tunjukkan bahwa jika n lemparan pertama semuanya menghasilkan sisi gambar, maka peluang bersyarat bahwa m lemparan berikutnya semuanya juga menghasilkan sisi gambar ialah (n +1) / (n+m+1).

25. Didalam kaidah penggantian Laplace, misalkan bahwa di dalam n lemparan yang pertama dihasilkan r sisi gambar dan n-r sisi angka. Tunjukkan bahwa peluang munculnya sisi gambar pada lemparan ke-(n+l) ialah (r+1)/n+2). Untuk

mengerjakan ini, anda harus membuktikan dan menggunakan identitas.

$$\int_0^1 y^n(1-y)^m\,dy = \frac{n!\,m!}{(n+m+1)!}$$

Petunjuk: Untuk membuktikan identitas ini, misalkan C (n,m) = $\int_0^1 y^n(1-y)^m\,dy$ dengan mengintegrakan bagian-demi-bagian (integration by parts) akan diperoleh

$$C_{(n,m)}\ \frac{m}{n+1}C(n+1,m-1)$$

Mulai dengan C(n,0) = 1/n+1), buktikan identitas itu melalui induksi terhadap m.

26. Andaikan teman anda yang senang berfilosofi namun tidak senang bermatematika mengatakan bahwa kaidah penggantian Laplace pasti salah sebab bisa memberikan hasil yang aneh dan tidak masuk akal. “Sebagai missal” katanya, “jika seorang anak berumur 10 tahun, kaidah itu mengatakan bahwa, setelah hidup 10 tahun, anak ini berpeluang $\frac{11}{22}$ untuk bisa hidup di tahun yang akan datang. Sedangkan kalau naik ini mempunyai kakek yang berumur 80 tahun, maka menurut kaidah penggantian Laplace sang kakek berpeluang $\frac{81}{82}$ untuk bisa hidup di tahun yang akan datang. Tentu saja ini tidak masuk akal. Jelas, anak ini berpeluang hidup lebih besar dari tahun yang akan datang

dibandingkan kakeknya.” Bagaimana anda menangkis bantahan teman anda itu?

Soal Latihan

1. Dua dadu setimbang digulirkan. Berapa peluang bersyarat bahwa satu dadu muncul atau 6 jika diketahui kedua dadu itu muncul dengan mata yang berbeda 2
2. Jika dua dadu setimbang digulirkan, berapa peluang bahwa dadu yang pertama muncul mata 6 jika diketahui jumlah mata yang muncul dari kedua dadu ialah i? Hitunglah untuk semua kemungkinan nilai I antara 2 dan 12.
3. Berapa peluang sedikitnya salah satu dari dua dadu muncul mata 6 jika diketahui jumlah mata yang muncul i, i = 2,3,….. 1 2?
4. Sebuah kantung berisi 6 kelereng putih dan 9 kelereng hitam. Jika 4 kelereng diambil secara acak tanpa pemulihan, berapa peluang dua kelereng yang terambil pertama berwarna putih dan 2 lainnya berwarna hitam?
5. Sebuah kantung berisi 12 kelereng yang 8 diantaranya berwarna putih. Suatu contoh berukuran 4 diambil dengan pemulihan (tanpa pemulihan). Berapa peluang bersyarat (baik dalam kasus dengan pemulihan maupun tanpa pemulihan) bahwa kelereng yang pertama dan ketiga berwarna putih, jika diketahui didalam contoh itu terdapat 3 kelereng putih?

6. Seorang raja berasal dari sebuah keluarga dengan 2 anak. Berapa peluang anak yang satu lagi adalah saudara perempuan raja?
7. Sebuah keluarga mempunyai 2 anak. Berapa peluang bahwa keduanya adalah perempuan bila yang tertua perempuan?
8. Ada 3 kantung. Kantung A berisi 2 kelereng putih dan 4 kelereng merah; kantung B berisi 8 kelereng putih dan 4 kelereng merah; dan kantung C berisi 1 kelereng putih dan 3 kelereng merah. Jika satu kelereng diambil secara acak dari setiap kantung, berapa peluang kelereng yang terambil dari kantung A berwarna putih jika diketahui ada 2 kelereng putih yang terambil?
9. Didalam suatu permainan brij, Barat tidak mempunyai kartu As. Berapa peluang pasangannya (a) tidak mempunyai As, dan (b) mempunyai 2 atau lebih As? Hitung lagi kedua peluang itu bila Barat mempunyai 1 As.
10. Tiga kartu diambil secara acak, tanpa pemulihan, dari seperangkat kartu brij yang terdirii atas 52 kartu. Hitunglah peluang bersyarat bahwa kartu pertama yang terambil ialah kartu hati jika diketahui yang kedua dan ketiga juga kartu hati?
11. Sebuah kantung pada mulanya berisi 5 kelereng putih dan 7 kelereng hitam. Setiap kali sebuah kelereng terambil, warnanya diperhatikan dan kemudian dimasukkan kembali ke dalam kantung dan ditambah dengan 2 kelereng lain yang warnanya sama.

(a) Hitunglah peluang bahwa 2 kelereng pertama yang terambil berwarna hitam dan 2 kelereng berikutnya berwarna putih.

(b) Hitunglah peluang bahwa diantara 4 kelereng pertama yang terambil ada 2 yang berwarna hitam.

12. Ada 2 bola. Masing-masing bola akan dicat hitam atau kuning dan kemudian dimasukkan ke dalam kantung. Misalkan peluang masing-masing bola dicat hitam ialah ½, dan kedua kejadian pengecatan bola ini behas.

    (a) Misalkan anda mendapat informasi bahwa cat kuning telah digunakan (sehingga sedikitnya satu kelereng telah dicat kuning). Hitunglah peluang bersyarat bahwa kedua bola itu dicat kuning.

    (b) Misalkan sekarang kantung itu terjatuh dan 1 bola keluar. Ternyata bola ini berwarna kuning. Berapa peluang bahwa kedua bola itu berwarna kuning? Jelaskan.

13. Cara berikut diajukan untuk menduga banyaknya orang berusia diatas 50 tahun disebuah kota yang berpenduduk 100.000 jiwa. “Sambil menyusuri jalan-jalan, buatlah catatan persentase orang yang anda jumpai yang berusia diatas 50. Lakukan ini selama beberapa hari; kemudian kalikan angka persentase yang anda peroleh dengan 100.000 untuk mendapatkan nilai dugaannya.” Berikan komentar terhadap cara ini.

Petunjuk: Misalkan p menyatakan proporsi penduduk kota yang berusia diatas 50. Lebih lanjut, misalkan α_1 menyatakan proporsi waktu yang dihabiskan penduduk berusia dibawah 50 dijalan-jalan, dan α_2 adalah nilai padanannya untuk penduduk yang berusia diatas 50. Besaran apa yang diduga oleh cara ini? Bilakah kira-kira ini sama dengan p?

14. Andaikan 5 persen diantara laki-laki dan 0,25 persen diantara perempuan menderita buta warna. Seorang penderita buta warna diambil secara acak. Berapa peluang yang terpilih ini laki-laki? Asumsikan bahwa banyaknya laki-laki dan perempuan sama. Bagaimana seandainya banyaknya laki-laki dua kali banyaknya perempuan?

15. Ada dua kantung, yang berisi 1 kelereng hitam dan 1 kelereng putih, yang lain berisi 2 kelereng hitam dan 1 kelereng putih. Sebuah kantung diambil secara acak, dan kemudian sebuah kelereng diambil secara acak dari kantung terpilih. Berapa peluang terambilnya kelereng hitam? Berapa peluang terpilihnya kantung pertama jika diketahui kelereng yang terambil putih?

16. Orang Inggris menulis regour, sedangkan untuk kata yang sama orang Amerika menulis rigor. Seorang yang menginap di sebuah hotel menulis kata lain, dan sebuah huruf yang diambil secara acak dari tulisan ini ternyata adalah sebuah vocal (huruf hidup). Jika 40 persen diantara yang berbahasa Inggris menginap di hotel itu ialah orang

Inggris dan 60 persen lainnya orang Amerika, berapa peluang yang menulis tadi orang Inggris?

17. Kantung A berisi 2 kelereng putih dan 1 kelereng hitam, sedangkan kantung B berisi kelereng putih dan 5 kelereng hitam. Sebuah kelereng diambil secara acak dari kantung A dan dimasukkan ke dalam kantung B. Sebuah kelereng kemudian diambil dari kantung B dan ternyata berwarna putih?

18. Tiga toko besar A, B, dan C mempekerjakan 50, 75 dan 100 pegawai dan diantaranya masing-masing 50, 60, 70 persen perempuan. Peluang berhenti bekerja sama besar untuk semua pegawai, tidak tergantung pada jenis kelamin. Seorang pegawai mengundurkan diri dari pekerjaan, dan ternyata ia perempuan. Berapa peluang ia tadinya bekerja di toko C?

19. (a) Seorang penjudi membawa dikantung celananya sekeping uang logam biasa dan sekeping uang logam yang kedua sisinya ialah sisi gambar. Ia merogoh ke dalam sakunya dan mengambil satu uang logam secara acak; ketika kemudian melemparkannya, ternyata muncul sisi gambar. Berapa peluang itu ialah uang logam yang biasa?

    (b) Misalkan ia kemudian melempar uang logam yang sama untuk kedua kalinya dan ternyata kembali muncul sisi gambar. Sekarang, berapakah peluang bahwa itu ialah uang logam yang biasa?

    (c) Misalkan bahwa ia melempar uang logam itu untuk ketiga kalinya dan kali ini ternyata muncul sisi angka. Berapakah sekarang peluang bahwa itu ialah uang logam yang biasa?

20. Kantung A berisi 5 kelereng putih dan 7 kelereng hitam. Kantung B berisi 3 kelereng putih dan 12 kelereng hitam. Kemudian kita lemparkan sekeping uang logam setimbang. Jika muncul sisi gambar, satu kelereng diambil secara acak dari kantung A, sedangkan jika muncul sisi angka, satu kelereng diambil dari kantung B. Misalkan kelereng yang terambil berwarna putih. Berapa peluang uang logam yang dilemparkan sebelumnya memunculkan sisi angka?

21. Dalam contoh 3a berapakah peluang seseorang mengalami kecelakaan pada tahun kedua jika diketahui ia tidak mengalami kecelakaan pada tahun pertamanya?

22. Simaklah suatu contoh berukuran 3 yang ditarik dengan cara berikut. Kita mulai dengan suatu kantung yang berisi 5 kelereng putih dan 7 kelereng merah. Pada setiap tahap sebuah kelereng diambil dan warnanya diamati. Kelereng kemudian dikembalikan ke dalam kantung ditambah dengan satu kelereng lain yang warnanya sama. Hitunglah peluang bahwa contoh itu mengandung (a) 0 kelereng putih, (b) 1 kelereng putih, (c) 2 kelereng putih dan (d) 3 kelereng putih.

23. Sebuah kantung berisi b kelereng hitam dan r kelereng merah. Satu kelereng diambil secara acak, namun ketika dikembalikan kedalam kantung c buah kelereng yang warnanya sama juga

ditambahkan ke dalam kantung. Sekarang, misalkan kita mengambil satu kelereng lagi secara acak. Tunjukkan bahwa peluang kelereng yang terambil pertama berwarna hitam ialah b/(b+r+c) jika diketahui bahwa kelereng yang terambil kedua berwarna merah.

24. Seperangkat kartu brij dikocok dan kemudian dibagi menjadi dua bagian, masing-masing 26 kartu. Sebuah kartu diambil dari salah satu bagian, dan ternyata adalah kartu As. As ini kemudian digabungkan dengan bagian yang lain. Bagian ini kemudian dikocok dan sebuah kartu diambil dari bagian ini. Hitunglah peluang bahwa kartu yang diambil terakhir ini ialah kartu As.

    PETUNJUK Kondisikan pada apakah kartu yang terambil pertama terambil lagi atau tidak.

25. Tiga juru masak, A, B, dan C membuat sejenis kue dan peluang kue itu gagal mengembang dengan baik masing-masing ialah 0,02; 0,03; dan 0,05. Di restoran tempat ketiga guru masak itu bekerja, A membuat 50 persen dari kue tersebut, B 30 persen, dan C 20 persen. Berapa proporsi “kegagalan” yang disebabkan oleh A?

26. Di dalam sebuah kantung terdapat 3 koin; yang terdiri atas satu koin yang kedua sisinya berisi gambar, satu koin biasa yang setimbang, dan satu koin lagi yang tidak setimbang yang sisi gambarnya berpeluang muncul 0,75. Satu koin diambil secara acak dan kemudian dilemparkan, ternyata muncul sisi gambar. Berapa peluang bahwa koin ini adalah yang kedua sisinya bergambar sama?

27. Tiga narapidana diberitahu bahwa salah satu dari mereka telah diambil secara acak untuk dieksekusi, sedangkan dua lainnya akan dibebaskan. Narapidana A secara diam-diam bertanya kepada seorang petugas siapa diantara kedua temannya yang akan dibebaskan, dengan alasan tidak ada salahnya membocorkan informasi sebab toh sedikitnya salah seorang temannya .pasti akan dibebaskan. Petugas menolak membocorkan informasi, sambil mengemukakan bahwa jika A tahu siapa temannya yang akan dibebaskan, maka peluangnya untuk dieksekusi akan naik dari 1/3 menjadi ½ sebab dengan demikian ia menjadi salah satu dari dua narapidana. Bagaimana menurut hemat anda penalaran petugas tersebut?

28. Misalkan kita mempunyai 10 uang logam. Bila uang logam ke-I dilemparkan ternyata sisi gambar akan muncul dengan peluang i/10, i=1,2,....10. Sebuah uang logam diambil secara acak, dan setelah dilemparkan ternyata muncul sisi gambar. Berapa peluang bersyarat bahwa itu ialah uang logam kelima?

29. Sebuah kantung berisi 5 kelereng putih dan 10 kelereng hitam. Sebuah dadu setimbang digulirkan dan kelereng diambil dari kantung itu sebanyak mata yang muncul dari dadu tersebut. Berapa peluang bahwa semua kelereng yang terambil berwarna putih semua? Berapa peluang bersyarat bahwa dadu yang digulirkan menghasilkan mata 3 jika diketahui semua kelereng yang terambil berwarna putih semua?

30. Ada dua almari cabinet yang persis sama yang masing-masing mempunyai 2 laci. Di dalam almari cabinet A terdapat sekeping uang perak dalam setiap lacinya, sedangkan didalam almari kabinet B terdapat sekeping uang perak dalam laci yang satu dan sekeping uang emas dalam laci lainnya. Sebuah almari kabinet diambil secara acak, salah satu lacinya dibuka dan ternyata ditemukan sekeping uang perak.

    (a) Berapa peluang ada uang perak di laci yang satunya lagi?

    (b) Berapa peluang bahwa yang terpilih ialah almari kabinet A?

31. Misalkan ada suatu tes diagnostic kanker yang berketelitian 95 persen baik terhadap penderita maupun bukan penderita kanker. Jika „.4 persen populasi menderita kanker, hitunglah peluang; seorang yang dites adalah penderita kanker bila hasil tes itu memang mengatakan demikian.

32. Misalkan sebuah perusahaan asuransi menggolongkan orang atas salah satu dari 3 kelompok berisiko baik, berisiko rata-rata, dan berisiko buruk. Data yang berhasil dikumpulkan menunjukkan bahwa peluang seorang yang berisiko baik, rata-rata; dan buruk mengalami kecelakaan dalam selang periode 1 tahun masing-masing ialah 0.05, 0.15, dan 0.30. Jika 20 persen populasi “berisiko baik”, 50 persen “berisiko rata-rata” dan 30 persen “berisiko buruk,” berapa proporsi orang yang mengalami kecelakaan dalam periode satu tahun? Jika A seorang pemegang polis

dan ia tidak mengalami kecelakaan pada 1994, berapa peluang bahwa ia seorang yang berisiko baik (rata-rata)?

33. Jika anda harus membangun suatu model matematis bagi kejadian-kejadian E dan F, sebagaimana diuraikan didalam butir (a) sampai (e), akankah anda mengasumsikan bahwa kedua kejadian itu bebas? Jelaskan alasan anda.

    (a) E adalah kejadian bahwa seorang pengusaha bermata biru, dan F adalah kejadian bahwa sekretarisnya bermata biru.

    (b) E adalah kejadian bahwa seorang professor mempunyai mobil, dan F adalah kejadian bahwa namanya tercantum didalam buku tilpun.

    (c) E adalah kejadian bahwa seorang tingginya kurang dari 180 cm, dan F adalah kejadian bahwa beratnya lebih dari 100 kg.

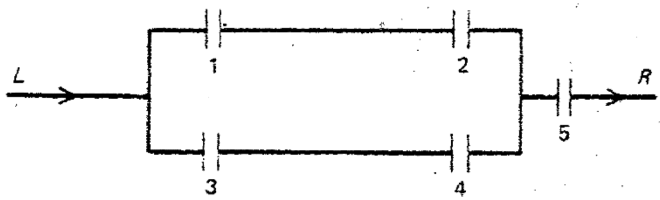
    (d) E adalah kejadian bahwa seseorang tinggal di Amerika Serikat, dan F adalah kejadian bahwa ia tinggal di Belahan Bumi bagian Barat.

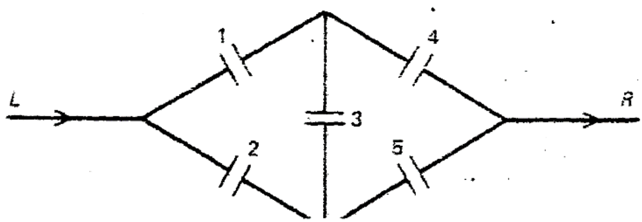
    (e) E adalah kejadian bahwa esok akan hujan, dan F adalah kejadian bahwa esok lusa akan hujan.

34. Suatu mata kuliah diikuti oleh 4 mahasiswa laki-laki tingkat I, 6 mahasiswa perempuan tingkat I, dan 6 mahasiswa laki-laki tingkat II. Berapa banyak mahasiswa perempuan tingkat II harus ada jika jenis kelamin dan tingkat harus bebas bila seorang mahasiswa diambil secara acak?

35. Mr. Jones mengembangkan suatu system perjudian untuk memenangkan permainan rulet. Bila ia memasang taruhan, ia memasang pada angka merah. Namun ia baru memasang taruhan bila 10 putaran sebelumnya menghasilkan angka hitam. Alasannya, peluang untuk menang sangat besar, sebab peluang 11 putaran berturut-turut menghasilkan angka hitam sangatlah kecil. Bagaimana pendapat anda?

36. Peluang tertutupnya relay ke-I didalam rangkaian berikut ialah p_i, i = l,2,3,4,5. Bila semua relay berfungsi secara bebas, berapa peluang terjadi suatu arus antara L dan R bagi masing-masing rangkaian berikut?





37. Suatu sistem rekayasa yang terdiri atas n komponen dikatakan sebagai suatu sistem k diantara n (k ≤ n) bila sistem itu berfungsi jika dan hanya jika sedikitnya k diantara n komponen itu

berfungsi. Misalkan bahwa semua komponen berfungsi secara bebas satu sama lain.

(a) Jika komponen ke-i berfungsi dengan peluang P_i, i = 1,2,3,4, hitunglah peluang bahwa suatu system 2-di-antara-4 berfungsi.

(b) Ulangi butir (a) untuk suatu system 3-di-antara-5

(c) Ulangi untuk suatu system k-di-antara-n bila semua Pi sama dengan p (artinya, Pi = , i = 1, 2, ... n).

38. Misalkan bahwa setiap anak yang dilahirkan oleh pasangan suami isteri berpeluang sama lahir sebagai laki-laki atau perempuan tidak tergantung dari sebaran jenis kelamin anak-anak lain di dalam keluarga itu. Untuk suatu keluarga dengan 5 anak, hitunglah peluang kejadian-kejadian berikut ini:

(a) Semua anak berjenis kelamin sama.

(b) Tiga anak tertua laki-laki sedangkan dua anak lainnya perempuan.

(c) Tepat ada 3 anak laki-laki

(d) Dua anak tertua laki-laki

(e) Sedikitnya ada 1 anak perempuan

39. Peluang menang pada satu guliran dadu ialah p. A mulai lebih dulu, dan bila ia gagal, ia menyerahkan dadu kepada B, yang kemudian mencoba menang pada gilirannya. Mereka terus bolak-balik menyerahkan dan menggulirkan dadu sampai salah seorang diantara mereka menang. Berapa peluang

menang mereka masing-masing? Ulangi pertanyaan ini seandainya ada k pemain.

40. Ulangi Soal 39 bila diasumsikan bahwa, ketika giliran A menggulirkan dadu, peluang A menang ialah P_1, dan ketika giliran B menggulirkan dadu, peluang B menang ialah P_2.

41. Tiga orang secara berbarengan melemparkan sekeping uang logam. Peluang A, B, dan C masing-masing memperoleh sisi gambar ialah P_1, P_2, dan P_3. Jika satu orang memperoleh hasil yang berbeda dari dua orang lainnya, maka orang ini dinyatakan kalah. Jika tidak ada yang kalah, pelemparan uang logam dilanjutkan terus sampai ada yang kalah. Berapa peluang A kalah?

42. Misalkan E dan F adalah dua kejadian yang saling menyisihkan dari suatu percobaan tunjukkan bahwa jika tindakan-tindakan yang bebas dari percobaan ini dilaksanakan, maka peluang E terjadi sebelum F ialah $P(E)/[P(E) + P(F)]$

43. A dan B melemparkan uang logam. Yang berhasil lebih dekat ke suatu garis tertentu memperoleh Rp.100 dari yang lain. Bila A memulai permainan dengan Rp.300 dan B dengan Rp.700, berapa peluang A menang (artinya, uang B habis) jika kedua pemain ini sama terampilnya? Bagaimana jika A lebih baik dari B, dan peluang A unggul dalam setiap lemparan ialah 0,60?

44. Dalam pengguliran sepasang dadu setimbang berkali-kali, berapa peluang memperoleh 2 kali jumlah mata tujuh sebelum 6 kali jumlah mata genap?

45. Ada sejumlah pemain yang sama baiknya. Di dalam setiap pertandingan, peluang salah satu menang dari dua kontestan yang saling bertanding ialah ½. Suatu grup 2^n pemain dipasang-pasangkan secara acak untuk saling bertanding. Sejumlah 2^{n-1} pemenang pada babak pertama dipasang-pasangkan lagi secara acak untuk saling bertanding pada babak kedua, dan demikian seterusnya sampai tinggal satu pemenang terakhir. Perhatikan dua kontestan tertentu A dan B. Definisikan kejadian A_i, $i \leq n$, dan kejadian E sebagai berikut:

A_i : A bermain sebanyak tepat i kali pertandingan

E : A dan B pernah saling bertanding

Hitunglah

(a) $P(A_i)$, i = 1,.. ,n

(b) P(E)

(c) Misalkan $P_n = P(E)$. Tunjukkan bahwa

$$P_n = \frac{1}{2^n - 1} + \frac{2^n - 2}{2^n - 1}\left(\frac{2}{1}\right)P_{n-1}$$

dan gunakan ini untuk memperoleh jawaban anda dari pertanyaan (b)

46. A dan B melemparkan uang logam. A mulai lebih dulu dan terus melemparkan uang logamnya sampai diperoleh sisi angka. Setelah ini B memperoleh giliran dan melemparkan terus uang logamnya sampai diperoleh sisi angka, kemudian ganti A yang memperoleh giliran, dan demikian seterusnya. Misalkan P_1 adalah peluang uang logam

A muncul sisi gambar, dan P_2 adalah peluang uang logam B muncul sisi gambar. Pemenang permainan ini ialah yang lebih dulu memperoleh

(a) 2 sisi gambar berturut-turut

(b) 2 sisi gambar

(c) 3 sisi gambar berturut-turut

(d) 3 sisi gambar

Hitunglah peluang A menang dalam setiap kasus diatas

47. Dadu A empat sisinya dicat merah dan 2 sisinya dicat putih, sedangkan dadu B 2 sisinya dicat merah dan 4 sisinya dicat putih. Sekeping uang logam setimbang dilemparkan. Jika muncul sisi gambar, permainan dilanjutkan dengan menggulirkan dadu A; jika muncul sisi angka, digunakan dadu B.

    (a) Tunjukkan bahwa peluang memperoleh sisi merah ialah ½ pada lemparan yang mana pun.

    (b) Jika dua lemparan pertama menghasilkan sisi merah, berapa peluang memperoleh merah pada lemparan ketiga?

    (c) Jika sisi merah muncul pada dua lemparan pertama, berapa peluang bahwa dadu yang digunakan ialah dadu A?

48. Didalam sebuah kantung ada 12 kelereng, 4 diantaranya berwarna putih. Tiga pemain, yaitu A, B, dan C, secara bergantian mengambil satu kelereng dan kantung tersebut, pertama A, kemudian B, kemudian C, kemudian A, dan

seterusnya. Pemenangnya ialah yang lebih dulu memperoleh kelereng putih. Hitunglah peluang menang setiap pemain bila (a) kelereng dikembalikan ke dalam kantung setiap kali habis diambil, dan (b) kelereng yang terambil tidak dikembalikan ke dalam kantung.

49. Ulangi soal 48 jika setiap pemain mengambil dari kantungnya sendiri. Dengan kata lain, misalkan ada 3 kantung yang masing-masing berisi 12 kelereng yang 4 diantaranya berwarna putih.

50. Pada contoh 5d, berapa peluang bersyarat bahwa uang logam ke-I terpilih jika diketahui bahwa n tindakan yang pertama semuanya menghasilkan sisi gambar?

51. Pada kaidah penggantian Laplace, contoh 5d, apakah hasil-hasil percoban dan lemparan-lemparan yang berturutan saling bebas satu sama lain? Jelaskan

52. Seorang terdakwa yang diadili oleh 3 hakim dinyatakan bersalah jika sedikitnya 2 hakim memutuskan bahwa terdakwa bersalah. Misalkan bahwa jika sebenarnya terdakwa itu memang, setiap hakim itu akan memutuskan secara bebas satu sama lain bahwa terdakwa bersalah dengan peluang 0,7; sedangkan bila sesungguhnya terdakwa itu tidak bersalah, peluang masing-masing hakim ini memutuskan bahwa terdakwa bersalah ialah 0,2. Jika 70 persen diantara para terdakwa adalah bersalah, hitunglah peluang bersyarat bahwa hakim nomor 3 memutuskan bersalah jika diketahui bahwa:

(a) Hakim 1 dan 2 memutuskan bersalah.

(b) Hakim 1 dan 2 memutuskan 1 bersalah dan 1 tidak bersalah (jika tidak tahu hakim mana memutuskan apa).

(c) Hakim 1 dan 2 keduanya memutuskan terdakwa tidak bersalah.

Misalkan E_i, i=1,2,3 menyatakan kejadian bahwa hakim i memutuskan terdakwa bersalah. Apakah kejadian-kejadian ini bebas? Apakah bebas bersyarat? Jelaskan.

Bab 4
Metodologi Statistik Peluang Bisnis

Pendahuluan

Kalangan pelaku usaha menyesalkan keputusan Bank Indonesia (BI) yang mempertahankan suku bunga acuan (BI rate) pada level 9,5 persen meskipun tingkat inflasi Oktober turun. Belum turunnya BI Rate menyebabkan pergerakan sektor riil menjadi terhambat.

Dampak penahanan BI rate di 9,50 persen akan mengakibatkan pemberian kredit terhenti, hingga akhirnya dunia usaha akan slow down dan tidak ekspansif" ujar Ketua Umum Himpunan Pengusaha Muda Indonesia (Hipmi) Erwin Aksa kemarin. Menurut dia, pengetahuan likuiditas masih akan terjadi sehingga semakin menyulitkan dunia usaha dalam memperoleh pembiayaan. Di sisi lain, beberapa industri terpaksa mengurangi produksi karena menurunnya permintaan.

Erwin mengaku para pelaku usaha menyesalkan keputusan Rapat dewan Gubernur BI yang mempertahankan BI rate pada level 9,5 persen itu. BI berdalih keputusan itu sudah berdasarkan evaluasi menyeluruh terhadap perkembangan ekonomi dan keuangan, baik dalam negeri maupun luar negeri, serta arah perkembangan laju inflasi “Kebijakan ini tidak sejalan dengan keinginan pemerintah yang ingin menggerakkan sektor riil, “ tukasnya.

Dia menambahkan, keputusan BI mempertahankan RI rate membuat pengusaha tetap terbebani bunga utang yang tinggi. Kondisi itu bisa meningkatkan potensi gagal bayar luang (default). Dalam bisnis, bunga perbankan menjadi sangat penting untuk mengurangi beban dunia usaha. Menurut dia, kenaikan BI rate tidak cukup kuat untuk menahan pelemahan rupiah terhadap dolar AS. “Apalagi, masyarakat kini semakin mudah melarikan dananya ke luar negeri,” lanjutnya.

Oleh karena itu, lanjut Erwin, BI jangan hanya menggunakan BI rate untuk menstabilkan moneter. Namun, perlu meningkatkan kehati-hatian terhadap valuta asing yang keluar dari Indonesia. Dia mengusulkan RI membuat kebijakan yang mewajibkan seluruh devisa hasil ekspor Indonesia ditarik ke dalam negeri. “Tidak perlu diparkir di negara lain, sehingga langkah-langkah BI akan cukup untuk mengamankan stabilitas moneter Indonesia, “ terangnya.

Wakil Ketua Umum Kadin, Chris Kanter mengatakan, upaya BI untuk mendukung pertumbuhan sektor riil harus diimbangi dengan penurunan BI rate. Disisi lain BI menilai BI Rate itu ditetapkan untuk menahan ekspektasi inflasi dan menjaga kurs rupiah. (**wir/fan**)

Apa yang dapat Anda simpulkan? Tingkat suku bunga yang tinggi terpaksa harus ditetapkan oleh Bank Indonesia sehingga menyebabkan melemahnya nilai tukar rupiah terhadap dolar AS. Tingginya tingkat suku bunga ini dipicu oleh krisis global. Naiknya tingkat suku bunga Bank direspons negatif oleh kalangan usaha yang pada gilirannya akan mengurangi produksi karena menurunnya permintaan masyarakat. Beberapa pertanyaan timbul dalam benak kita, mengapa kejadian krisis global di AS berdampak pada turunnya permintaan barang di Indonesia? Bagaimana bentuk hubungan yang terjadi (model matematisnya)? Faktor-faktor (variabel-variabel) apakah yang terkena dampak krisis global? Untuk dapat menjawab semua pertanyaan tersebut, metode statistik peluang bisnis akan diperlukan. Untuk itu, kita akan membahas tahapan-tahapan dalam metode statistik peluang bisnis.

4.1 Pengertian Model

Perhatikan Gambar 5.1 si tokoh laki-laki terkejut setelah ia menemui gadis yang dalam iklan jodoh mengaku “tinggi dan seksi”. Bisa ditebak, gambaran yang ada dalam iklan itu ternyata tidak sesuai dengan kenyataannya. Dalam hal ini, kita bisa mengetahui iklan jodoh itu sebagai sebuah model verbal.

Sumber: *Jawa Pos*, 25 Oktober 2008

Gambar 5.1 Iklan jodoh

Model merupakan abstraksi/penyederhanaan/ representasi dari dunia nyata (*the real world*), Suatu model digunakan untuk mendekati fenomena. Fenomena pada umumnya bersifat kompleks sehingga replika dan dunia nyata perlu dibuat agar fenomena menjadi lebih sederhana dan memudahkan orang untuk mempelajarinya. Ada beberapa tipe model, antara lain,

1. Model Verbal

Merupakan replika secara tepat dari dunia nyata dalam bentuk verbal. Misalnya:

a. iklan jodoh di surat kabar: “Seorang gadis, single, tinggi semampai, kulit kuning, wajah cantik, mendambakan,...” merupakan model yang menggambarkan seorang gadis dalam bentuk verbal.

b. hukum permintaan: “Jumlah barang yang diminta berbanding terbalik dengan harganya” merupakan model yang menggambarkan hubungan antara permintaan dengan harga suatu barang.

2. Model Fisik

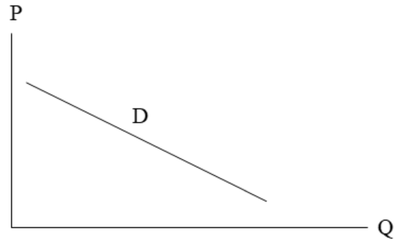
Merupakan replika dari dunia nyata dalam bentuk fisik, bisa berupa 2 dimensi maupun 3 dimensi. Misalnya:

a. Foto seseorang merupakan model fisik 2 dimensi dari orang yang difoto.

b. Patung, boneka, atau purwarupa pesawat terbang merupakan model fisik 3 dimensi.

3. Model Geometris

Merupakan replika dari dunia nyata dalam bentuk grafik. Misalnya: Grafik yang menggambarkan hubungan antara jumlah barang yang diminta dengan harganya. Gambar 5.2.



Gambar 5.2 Fungsi permintaan

4. Model Aljabar/Simbolis

Merupakan replika dari dunia nyata dalam bentuk simbolis atau persamaan matematika. Model statistik peluang bisnis termasuk model yang bertipe aljabar (matematika). Misalnya:

a. fungsi konsumsi: $C = \beta_0 + \beta_1 Y$

b. fungsi permintaan: $Q_x^d = \beta_0 + \beta_1 P_x + \beta_2 P_y + \beta_3 P_c + \beta_4 t + \beta_5 Y$

Ilustrasi-ilustrasi di atas menggambarkan bahwa suatu model harus benar-benar mewakili (merepresentasikan) dunia nyata. Beberapa ilustrasi berikut akan menambah pemahaman tentang suatu model.

1. Seorang penjual sepeda motor dari rumah ke rumah tidak harus membawa mobil untuk ditawarkan kepada konsumen, mereka cukup membawa brosur dan foto (gambar) dari sepeda motor yang ditawarkan. Konsumen akan kecewa dan mungkin tidak jadi membeli

bila ternyata sepeda motor yang dibeli tidak sesuai dengan gambar yang ditawarkan sales.

2. Seorang pencari jodoh lewat iklan di surat kabar mungkin tidak meneruskan hubungannya ketika gadis yang diajaknya kopi darat tidak sesuai dengan iklan (single, tinggi semampai, kulit kuning, wajah cantik) yang ia baca di surat kabar.

Model statistik peluang bisnis harus mampu menggambarkan fenomena ekonomi yang dimodelkan.

Untuk dapat membuat suatu model dengan baik, pembuat model harus mengetahui dengan tepat karakteristik fenomena yang dimodelkan. Sebagai ilustrasi, seorang perancang busana harus mengetahui dengan tepat karakteristik pemesan busananya agar busana tersebut cocok. Bayangkan saja jika seorang dosen mengajar dengan baju warna merah menyala bak seorang artis yang sedang pentas, tentu tidak pantas, bukan? Hal ini mungkin disebabkan oleh perancang busana yang tidak tahu bahwa pemesan busananya berprofesi sebagai dosen. Pemodelan statistik peluang bisnis merupakan suatu proses untuk mengonstruksi model yang menuntut seni (*arts*), bukan hanya sains. Dalam peluang bisnis, peran seni (seni membuat model) sangat besar. Dengan demikian, untuk dapat membuat model statistik peluang bisnis yang tepat dan dapat digunakan, pembuat model harus mengetahui dengan tepat fenomena ekonomi yang dimodelkan. Dalam pemodelan ini, statistika akan berperan sebagai (a) alat (*tool*) bukan tujuan dan (b) penerjemah pernyataan verbal dalam suatu bentuk (persamaan) yang tepat.

Beberapa tipe model lainnya adalah sebagai berikut:

1. **Model Linear dan Nonlinear**

   a. Model linear adalah model yang persamaan matematisnya berupa garis lurus.

   $y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \varepsilon$

   $y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + ... + \beta_p X_p + \varepsilon$

   b. Model nonlinear adalah model yang persamaan matematisnya tidak berupa garis lurus. Contoh :

   $y = \beta_0 \; X_1^{\beta_1} \; X_2^{\beta_2} \; e^{\varepsilon}$ (Model Cobb Douglas)

   $y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_{11} X_1^2 + \beta_{22} + \varepsilon$ (Model Kuadratik)

2. **Model Deterministik dan Model Stokastik**

   a. Model deterministik adalah model yang pasti atau disebut juga model matematis. Contoh:

   $y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + ... + \beta_p X_p$

   b. Model stokastik atau model statistik, atau probabilistik adalah model yang mengandung unsur ketidakpastian (probabilitas). Contoh:

   $y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + ... + \beta_p X_p + \varepsilon$

3. Model Statis dan Model Dinamis

a. model statis

Contoh:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{11} + \beta_2 X_{21} + ... + \beta_p X_{pt} + \varepsilon_t$$

b. model dinamis

Contoh:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{11} + \beta_2 X_{21} + ... + \beta_p X_{pt} + \alpha Y_{t=1} + \varepsilon_t$$

4.2 Spesifikasi Model

Tahapan penting dalam statistik peluang bisnis adalah pembuatan spesifikasi model atau pembuatan formulasi model secara spesifik (khusus) tentang fenomena bisnis yang dimodelkan. Urutan pemodelannya dapat digambarkan sebagai berikut:

Teori Bisnis → Model Bisnis → Model matematika/Statistik

Oleh karena itu, untuk dapat menghasilkan model yang baik, pembuat model harus mengetahui fenomena yang di modelkan.

Ada tiga hal yang harus diperhatikan dalam pembuatan formulasi model, yaitu (1) variabel-variabel yang digunakan dalam model, (2) tanda dan ukuran dari parameter model, serta (3) bentuk matematika dari model:

1. Variabel-variabel yang Digunakan dalam Model

Dalam mengonstruksi (membuat formulasi) model, hal penting yang harus dilakukan adalah menentukan variabel-variabel yang dilibatkan dalam model. Kita harus mampu menjawab:

a. Variabel apa saja yang dilibatkan dalam pemodelan,

b. Alasan mengapa variabel-variabel tersebut dilibatkan dalam model, dan

c. Manakah variabel endogennya dan manakah variabel eksogennya (*predeter-mine*).

Contoh 4.1

Model yang ingin dibuat adalah model fenomena permintaan sepeda motor merek Honda. Secara teori bisnis ekonomi, besarnya jumlah barang yang diminta (Q_x^d) dipengaruhi oleh harga barang yang bersangkutan (P_x), harga barang substitusi/kompetitor (P_y), harga barang komplemen (P_c), selera masyarakat/taste (t), serta pendapatan masyarakat (Y). Dari teori bisnis ekonomi tersebut, selanjutnya kita akan membuat variabel spesifik terkait dengan permintaan sepeda motor merek Honda, yaitu:

Q_x^d = permintaan terhadap sepeda motor Honda (unit/tahun)

P_x = harga sepeda motor merek Honda (juta rupiah/unit)

P_y = harga sepeda motor kompetitor/pesaing terdekat dari merek Honda, digunakan merek Yamaha (juta rupiah/unit)

P_c = harga barang komplemen sepeda motor merek Honda, digunakan harga suku cadang, atau biaya operasional dan perawatan (juta rupiah/unit/tahun)

t = taste atau selera masyarakat. Salah satu alat (variabel) yang dapat digunakan untuk mengukur selera masyarakat adalah iklan/promosi (juta rupiah/tahun).

Y = pendapatan masyarakat, dapat digunakan pendapatan perkapital (juta rupiah/tahun)

Variabel endogennya adalah Q_x^d, sedangkan variabel eksogennya (*predetermine*) adalah P_x, P_y, P_c, t, serta Y. Dengan demikian, formulasi modelnya adalah sebagai berikut :

$$Q_{dx} = f(P_x, P_y, P_c, t, Y)$$

2. Tanda dan Ukuran dan Parameter Model

Kita harus dapat menentukan tanda dan ukuran (besaran) parameter-parameter dari model yang diharapkan dan merupakan hipotesis kita. Untuk dapat menentukan tanda dan ukuran parameter, kita dituntun oleh teori/logika bisnis ekonomi secara apriori.

Contoh 4.2

Suatu model tentang fungsi konsumsi (C), yang besarnya konsumsi suatu rumah tangga secara teori bisnis ekonomi dipengaruhi oleh pendapatan (Y), menggunakan model berikut:

$C = \beta_0 + \beta_1 Y + \varepsilon$

Tanda yang diharapkan untuk β_0 adalah tanda positif ($\beta_0 > 0$) karena β_0 adalah besarnya konsumsi (C) pada saat pendapatan sama dengan nol (Y = 0) dan besarnya konsumsi tidak mungkin negatif.

Tanda yang diharapkan untuk β_1 adalah tanda positif ($\beta_1 > 0$) karena β_1 adalah besaran MPC (*Marginal Propensity to consume*), yaitu suatu besaran yang menunjukkan perubahan konsumsi apabila pendapatan naik sebesar satu satuan (misalnya, juta rupiah). Secara teori ekonomi, besarnya nilai MPC ada dalam interyal $0 \leq MPC \leq 1$. Kecilnya nilai MPC-nya menunjukkan bahwa sebuah rumah tangga (masyarakat/negara) sudah sejahtera. Sebaliknya, jika nilai MPC-nya besar (misalnya, > 0,9), rumah tangga (masyarakat/negara) tersebut masih belum sejahtera. Oleh karena itu, formulasi modelnya adalah sebagai berikut:

$C = \quad \beta_0 + \beta_1 Y + \varepsilon$

$\beta_1 > 0; 0 \leq \beta_1 \leq 1$

Contoh 4.3

Lihat Contoh 5.1 untuk pemodelan permintaan mobil merek *Toyota*. Jika model yang digunakan adalah model linear seperti berikut:

$$Q_x^d = \beta_0 + \beta_1 P_x + \beta_2 P_y + \beta_3 P_c + \beta_4 t + \beta_5 Y + \varepsilon$$

maka tanda dari masing-masing parameternya adalah:

a. $\beta_0 > 0$ karena β_0 merupakan besaran yang menunjukkan banyaknya permintaan pada saat P_x, P_y, P_c, t, Y semuanya bernilai nol, jumlah barang yang diminta tidak mungkin negatif.

b. $\beta_1 < 0$ karena β_1 merupakan besaran yang menunjukkan besarnya perubahan jumlah barang yang diminta sebagai akibat berubahnya harga sebesar 1 satuan. Secara teori ekonomi, hubungan antara harga dengan jumlah barang yang diminta adalah negatif. Namun, secara terperinci ada tiga kemungkinan tanda dari β_1, yaitu (1) $\beta_1 < 0$ untuk barang-barang normal, (2) $\beta_1 = 0$ untuk barang inferior (misalnya, garam dapur), serta (3) $\beta_1 > 0$ untuk barang-barang mewah atau antik.

c. β_2, > 0 karena β_2, merupakan besaran yang menunjukkan besarnya perubahan jumlah barang yang diminta sebagai akibat berubahnya harga barang substitusi/kompetitor sebesar 1 satuan.

Secara teori ekonomi, hubungan antara harga barang substitusi dengan jumlah barang yang diminta adalah positif.

d. $\beta_3 < 0$ karena β_3 merupakan besaran yang menunjukkan besarnya perubahan jumlah barang yang diminta sebagai akibat berubahnya harga barang komplementer sebesar 1 satuan. Secara teori ekonomi, hubungan antara harga barang komplementer dengan jumlah barang yang diminta adalah negatif.

e. $\beta_4 > 0$ karena β_4 merupakan besaran yang menunjukkan besarnya perubahan jumlah barang yang diminta sebagai akibat berubahnya selera masyarakat sebesar 1 satuan. Secara teori ekonomi, hubungan antara selera masyarakat dengan jumlah barang yang diminta adalah positif.

f. $\beta_5 > 0$ karena β_5 merupakan besaran yang menunjukkan besarnya perubahan jumlah barang yang diminta sebagai akibat berubahnya pendapatan masyarakat sebesar 1 satuan. Secara teori ekonomi, hubungan antara pendapatan masyarakat dengan jumlah barang yang diminta adalah positif.

3. Bentuk Matematika dari Model

Kita harus menentukan model secara matematis yang benar-benar mampu menggambarkan fenomena ekonomi, meskipun model yang digunakan linear atau nonlinear (kuadratik, Cobb Douglas), persamaan tunggal atau simultan, model statis atau dinamis.

4.3 Estimasi Model

Setelah formulasi model terbentuk, langkah selanjutnya adalah melakukan estimasi (perkiraan) terhadap parameter model. Sebelum melakukan estimasi model, data empiris dari hasil pengamatan harus sudah tersedia. Ada tiga jenis data, yaitu (1) data tamapang lintang (*cross-section*), (2) data berkala (*time series*), serta (3) data panel.

Data tampang lintang (*cross-section*) adalah data yang dikumpulkan secara serentak dalam kurun waktu yang bersamaan, misalnya data Survei Biaya Hidup yang dilakukan oleh BPS untuk mengetahui pola konsumsi rumah tangga di suatu kota (misalnya, Surabaya). Dari data tersebut, data tentang pengeluaran konsumsi makanan (beras, daging, ikan, sayur, buah, dan lain-lain) serta konsumsi nonmakanan (pendidikan, pakaian. transportasi, perumahan, hiburan/rekreasi, dan lain-lain) dapat diperoleh. Data berkala (*time series*) adalah data yang dikumpulkan berdasarkan seri waktu, misalnya data tentang pendapatan nasional dan konsumsi agregat tahunan dari tahun 1990 sampai 2007. Sedangkan data panel merupakan data gabungan antara data tampang lintang dengan data berkala.

Setelah model dan data tersedia, langkah selanjutnya adalah memilih metode estimasi yang paling sesuai. Jika persamaan tunggal dan semua asumsi klasik dipenuhi, maka metode yang paling sesuai adalah kuadrat terkecil yang biasa. Jika ada pelanggaran asumsi multikolinearitas, maka metode yang paling sesuai adalah regresi Ridge atau regresi komponen utama, atau regresi kuadrat terkecil parsial, dan lain-lain. Jika terjadi masalah heteroskedastisitas, maka metode yang sesuai adalah kuadrat terkecil terboboti. Jika model berupa persamaan simultan, maka metode yang sesuai adalah metode 2SLS atau 3SLS, dan seterusnya.

4.4 Evaluasi dan Hasil Estimasi

Setelah hasil estimasi model diperoleh, tahap selanjutnya adalah mengevaluasi hasil estimasi apakah model yang diperoleh layak atau tidak. Ada tiga kriteria yang digunakan untuk mengevaluasi model, yaitu (1) kriteria ekonomi secara apriori, (2) kriteria statistika, serta (3) kriteria ekonometrika.

1. Kriteria Ekonomi secara Apriori

Pada kriteria ekonomi, hasil estimasi akan dievaluasi, apakah tanda dan ukuran dari koefisien model sesuai dengan teori ekonomi. Selanjutnya, pembenaran (*justifikasi*) tentang kesesuaian maupun ketidaksesuaian tanda dan ukuran yang diperoleh harus dicari.

Contoh 4.4

Fungsi konsumsi ternyata menghasilkan persamaan $\hat{C} = 5000 + 0.95Y$. Nilai $\hat{\beta}_0 = 5000$, bertanda positif, artinya sesuai dengan logika/teori ekonomi. Nilai $\hat{\beta}_1$ = 0,95 menunjukkan perolehan MPC yang, baik tanda maupun ukurannya, sesuai dengan teori ekonomi bahwa 0 $\leq$ *MPC* $\leq$ 1, dan angka 0,95 juga menunjukkan bahwa masyarakat masih tergolong belum sejahtera. Namun, benarkah kondisi masyarakat memang demikian? ini adalah sebuah pertanyaan yang harus mampu dijawab oleh pembuat model.

Contoh 4.5

Model yang diperoleh dari hasil estimasi fungsi permintaan terhadap mobil merek Toyota sebagai berikut :

$$\hat{Q}_x^d = 5000 - 2P_x + 3P_y + 5P_c + 0{,}25t + 0{,}15Y$$

Evaluasi berdasarkan kriteria ekonominya adalah :

a. $\hat{\beta}_0$ = 5000, bertanda positif, berarti sesuai dengan teori ekonomi.

b. $\hat{\beta}_1$ = –2, bertanda negatif, berarti sesuai dengan teori ekonomi bahwa jumlah barang yang diminta berbanding terbalik (berlawanan arah) dengan harganya.

c. $\hat{\beta}_2$ = 3, beianda positif, berarti sesuai dengan teori ekonomi bahwa jumlah barang yang diminta berbanding lurus dengan harga barang substitusi. Dengan kata lain, naiknya harga mobil Suzuki akan diikuti dengan naiknya permintaan terhadap mobil Toyota.

d. $\hat{\beta}_3 = 5$, bertanda positif, berarti tidak sesuai dengan teori ekonomi bahwa jumlah barang yang diminta berbanding terbalik (berlawanan arah) dengan harga barang komplemennya. Artinya, naiknya harga suku cadang atau biaya operasional dan perawatan mobil Toyota akan diikuti dengan turunnya permintaan terhadap permintaan mobil Toyota (*ceteris peribes*). Ternyata secara empiris diperoleh tanda positif. Dalam hal ini, kita harus mampu mencari tahu alasannya. Mungkin saja terjadi kasus multikolinearitas.

e. $\hat{\beta}_4 = 0{,}25$, bertanda positif, berarti sesuai dengan teori ekonomi bahwa iklan dapat mempengaruhi masyarakat untuk menyukai produk yang diiklankan sehingga antara besarnya biaya promosi dengan jumlah barang yang diminta berbanding lurus.

f. $\hat{\beta}_5 = 0{,}15$ bertanda positif, berarti sesuai dengan teori ekonomi bahwa naiknya pendapatan masyarakat akan berpengaruh positif terhadap permintaan barang.

2. Kriteria Statistika

Kriteria statistika berkaitan dengan pengujian kesesuaian model (*goodness of fit*). Dalam hal ini, ada beberapa hal yang akan dievaluasi, yaitu koefisien determinasi, deviasi standar atau galat baku, serta pengujian hipotesis. Suatu model dikatakan baik apabila (1) R^2-nya tinggi, (2) galat bakunya kecil, serta (3) memutuskan menolak H_0 pada pengujian hipotesis.

Contoh 4.6

Dari hasil estimasi fungsi permintaan terhadap sepeda motor merek Honda diperoleh model sebagai berikut:

$\hat{Q}_x^d = 5000 - 2P_x + 3P_y + 5P_c + 0{,}25t + 0{,}15Y$; n = 40; R^2=95%

se (1000) (0.5) (1.0) (4) (0,1) (0.05)

Evaluasi dengan kriteria Statistika

a. Nilai R^2 = 95% , berarti modelnya sangat baik (sesuai).

b. Nilai *se* (*standard error*/galat baku) digunakan untuk menguji hipotesis terhadap parameter regresi. Karena n = 40 (besar), maka digunakan statistik uji z (normal standar).

Dengan Hipotesis $H_0 : \beta_j, = 0$

$H_1 : \beta_j \neq 0$

$z_{hitung} = \dfrac{\hat{\beta}_j}{se(\hat{\beta}_j)}$, nilai dibandingkan dengan nilai z_{tabel}

Dengan menggunakan tingkat signifikansi $\alpha = 5\%$, nilai Z_{tabel} = 1,96 ≈ 2. Jika diperhatikan secara terperinci, maka:

a. Untuk $\beta_1, \left|z_{hitung}\right| = \left|-2/0{,}5\right| = 4 > 2$ sehingga menolak H_0, artinya harga barang (sepeda motor merek Honda) berpengaruh secara signifikan dan negatif terhadap jumlah permintaan sepeda motor merek Honda.

b. Untuk $\beta_2, \left|z_{hitung}\right| = \left|3/1\right| = 3 > 2$ sehingga menolak H_0, artinya harga barang substitusi (sepeda motor merek Yamaha) berpengaruh secara signifikan terhadap jumlah permintaan sepeda motor merek Honda.

c. Untuk $\beta_3, \left|z_{hitung}\right| = \left|5/4\right| = 1{,}25 < 2$ sehingga tidak cukup alasan untuk menolak H_0, artinya harga barang komplementer tidak berpengaruh secara signifikan terhadap jumlah barang yang diminta.

d. Untuk $\beta_4, \left|z_{hitung}\right| = \left|0{,}25/0{,}1\right| = 2{,}5 > 2$ sehingga menolak H_0, artinya besarnya promosi (iklan) berpengaruh secara signifikan dan positif terhadap jumlah permintaan sepeda motor merek Honda.

e. Untuk $\beta_5, \left|z_{hitung}\right| = \left|0{,}15/0{,}05\right| = 3 > 2$ sehingga menolak H_0, artinya besarnya pendapatan masyarakat berpengaruh secara signifikan dan positif terhadap jumlah permintaan sepeda motor merek Honda.

3. Kriteria Ekonometrika

Kriteria ini berkaitan dengan evaluasi terhadap asumsi klasik, apakah semua asumsi klasik dipenuhi atau tidak. Beberapa asumsi klasik yang harus dipenuhi adalah (1) sisaan berdistribusi normal, (2) tidak ada kasus multikolinearitas, (3) tidak terjadi heteroskedastisitas, (4) tidak terjadi otokorelasi. Pembahasan tentang asumsi klasik dan bagaimana cara mendeteksi serta cara mengatasi apabila terjadi pelanggaran asumsi akan dibicarakan pada bab-bab selanjutnya.

4.5 Evaluasi Daya Peramalan

Salah satu tujuan pembuatan model (regresi) adalah untuk peramalan. Artinya, apabila nilai variabel independen diketahui (ditentukan), maka nilai tersebut dapat digunakan untuk meramalkan nilai variabel respons.

Contoh 5.7

Lihat data pada Tabel 5.1 Setelah data diolah dengan perangkat lunak Minitab, hasil yang diperoleh tercantum dalam Tabel 5.2. Selanjutnya, dari Tabel 5.2 persamaan $\hat{C}_1$ = 184,08 + 0,706Y_{14}, yang menunjukkan hubungan antara konsumsi ($\hat{C}_1$) dengan pendapatan nasional (Y), akan didapatkan.

Tabel 4.1 Data Pendapatan dan Pengeluaran Konsumsi (dalam miliar dolar AS)

Tahun	C_1	Y_1
1982	3081.5	4620.3
1983	3240.6	4803.7
1984	3407.6	5140.1
1985	3566.5	5323.5
1986	3708.7	5487.7
1987	3822.3	5649.5
1988	3972.7	5865.2
1989	4064.6	6062.0
1990	4132.2	6136.3
1991	4105.8	6079.4
1992	4219.8	6244.4
1993	4343.6	6380.6
1994	4486.0	6610.7
1995	4595.3	6742.1
1996	4714.1	6928.4

Sumber : Gujarati (2003)

C_1 = pengeluaran konsumsi (dalam miliar dolar AS)

Y_1 = pendapatan nasional/GNP (dalam miliar dolar AS)

Selanjutnya, persamaan tersebut dapat digunakan untuk memprediksi besarnya konsumsi. Jika besarnya

GNP pada tahun 1997 adalah 7269,8 miliar dolar AS, maka persamaannya menjadi:

$$\hat{C}_1 = -184,08 + 0,7064 * (7269,8) = 4951,37$$

Tabel 4.2 Hasil Pengolahan dengan Minitab

```
MTB > regres c2 1 c3;
SUBC> predict 7269.8.

Regression Analysis: Ct versus Yt

The regression equation is
Ct = - 184 + 0.706 Yt
Predictor     Coef   SE Coef      T      P
Constant   -184.08     46.26  -3.98  0.002
Yt        0.706408  0.007827  90.25  0.000

S = 20.2853   R-Sq = 99.8%   R-Sq(adj) = 99.8%

Analysis of Variance

Source           DF       SS       MS        F      P
Regression        1  3351407  3351407  8144.53  0.000
Residual Error   13     5349      411
Total            14  3356756

Predicted Values for New Observations
New
Obs     Fit   SE Fit         95% CI                95% PI
  1  4951.37   12.13   (4925.16, 4977.57)    (4900.31, 5002.43)

Values of Predictors for New Observations
```

Koefisien untuk Y_1 sebesar 0,70, yang pada fungsi konsumsi menurut teorema Keynes disebut *Marginal Propensity to Consumption* (MPC). Sedangkan *multiplier income* (M) dapat dicari dengan persamaan M = $\frac{1}{1-MPC}$. Dalam hal ini, nilai M sebesar 3,33. Selain itu, seandainya pemerintah menginginkan konsumsi sebesar 4.900, berapakah pendapatan nasional yang diperlukan? Sesuai dengan persamaan tersebut, maka:

$$4900 = -184,08 + 0,706\ Y_1$$

$$Y_1 = \frac{4900 + 184,08}{0,7064} = 7.197$$

Soal Pilihan Ganda

Pilihlah jawaban yang paling benar!

1. Tahapan-tahapan dalam penelitian ekonometrika adalah:
   a. spesifikasi model–estimasi model–evaluasi hasil estimasi evaluasi peramalan
   b. estimasi model–spesifikasi model–evaluasi daya peramalan–evaluasi hasil estimasi
   c. estimasi model–peramalan–evaluasi
   d. spesifikasi model–estimasi model
2. Hal-hal yang perlu diperhatikan dalam formulasi model adalah:
   a. variabel-variabel yang digunakan dalam model
   b. tanda dan ukuran dan parameter model
   c. bentuk matematika dan model
   d. a, b, dan c benar
3. Untuk mengevaluasi model, kriteria yang digunakan adalah:
   a. ekonomi
   b. statistika
   c. ekonometrika
   d. ketiganya (a, b, dan c) benar.

4. Apabila dalam suatu fungsi permintaan, kita memperoleh model berikut:

   $Q^d = 100 + 5P$ dengan $R^2 = 95\%$

   Dengan:

   Q^d = jumlah barang yang diminta

   P = harga barang

   a. kriteria ekonomi dan statistika dipenuhi

   b. kriteria ekonomi dan statistika tidak terpenuhi

   c. kriteria ekonomi tidak terpenuhi, kriteria statistika terpenuhi

   d. kriteria ekonomi terpenuhi, kriteria statistika tidak terpenuhi

5. Jika ingin membuat model yang memuat model harga barang antik (Y) dengan umur barang (X_1) dan jumlah penawar (X_2) dengan menggunakan model:

   $Y = \beta_0 + \beta_1 \alpha_1 + \beta_2 \alpha_2 + \varepsilon$

   maka tanda yang diharapkan adalah:

   a. $\beta_1 < 0$; $\beta_2 < 0$

   b. $\beta_1 > l$; $\beta_2 > 0$

   c. $\beta_1 < 0$; $\beta_2 > 0$

   d. $\beta_1 > 0$; $\beta_2 < 0$

Kunci Jawaban

1. a
2. d
3. d
4. c
5. b

Bab 5
Model Statistika Peluang Bisnis

Pendahuluan

Secara umum, ilmu ekonomi dibagi dalam dua kelompok, yaitu ilmu ekonomi mikro dan ekonomi makro. Ibarat hutan, hutan itu adalah ekonomi makro, sedangkan pohon-pohon yang berada di hutan adalah ekonomi mikro. Dengan demikian, model statistik peluang bisnis juga dibagi dalam dua kelompok, yaitu model ekonomi mikro dan ekonomi makro.

Bab ini akan membahas pengertian model secara umum dan juga model-model ekonometrika, yaitu model-model (fungsi) ekonomi yang sering digunakan.

5.1 Model Ekonomi Mikro

Model ekonomi mikro merupakan model ekonometrika yang berkaitan dengan fenomena ekonomi mikro. Beberapa model (fungsi) ekonomi mikro, antara lain adalah (1) fungsi produksi, (2) fungsi permintaan, (3) fungsi penawaran, (4) fungsi biaya, (5) fungsi pertumbuhan penduduk, (6) fungsi pendapatan nasional, serta (7) permintaan uang.

5.2 Fungsi Produksi

Fungsi produksi didefinisikan sebagai fungsi yang menunjukkan hubungan fisik antara output dengan input dalam suatu proses produksi. Secara simbol matematika, fungsi tersebut ditulis seperti berikut:

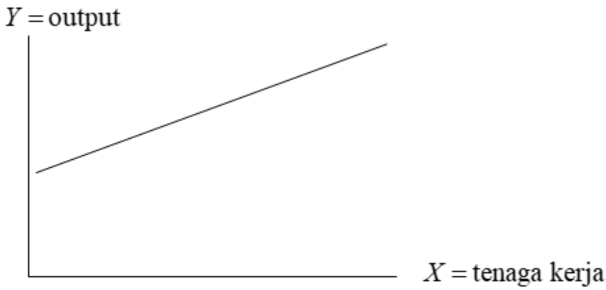
1. Y = $f(X)$ apabila inputnya (X) hanya satu.
2. Y = $f(X_1, X_2,..., X_p)$ apabila terdapat p buah input (X_1, X_2,..., X_p)

Misalnya, X_1 = tenaga kerja ; X_2 = modal ; X_3 = lain-lain.

Dilihat dari bentuknya, ada beberapa macam fungsi produksi. Beberapa di antaranya yang populer adalah (1) model fungsi linear, (2) model fungsi Cobb Douglas, serta (3) model fungsi polinomial.

1. Model Fungsi Produksi Linear

Fungsi produksi yang berbentuk linear berarti bahwa fungsi berupa garis lurus. Jika Y = output dan X = input tenaga kerja, maka bentuk fungsinya adalah sebagai berikut:



Gambar 5.1 Fungsi produksi linear

Model ekonometrika dan fungsi produksi linear adalah sebagai berikut:

a. $y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \varepsilon$ apabila inputnya satu

b. $y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + ... + \beta_p X_p + \varepsilon$ apabila terdapat *p* buah input

Koefisien regresi pada model linear merupakan besaran produksi marginal (*Marginal Product*, MP) yang didefinisikan sebagai tambahan output sebagai akibat bertambahnya input sebesar satu satuan (satu unit). Secara matematis, MP merupakan turunan pertama dari fungsi produksi (*Total Product*, TP).

$$MP_{X_1} = \frac{\partial Y}{\partial X_1} = \beta_1$$

Jika dalam suatu proses produksi semen:

output (Y) = banyaknya semen yang dihasilkan (kg)

input (X_1) = penggunaan tenaga kerja (orang)

(X_2) = penggunaan modal (dalam ribuan rupiah)

maka formulasi modelnya adalah sebagai berikut:

$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$

Seandainya dari hasil estimasi model diperoleh perkiraan fungsi produksi Y = 1000 + 150X_1 + 5X_2, model tersebut menunjukkan bahwa *Marginal Product* (MP) untuk input tenaga kerja adalah 150, artinya apabila dalam proses produksi tersebut jumlah tenaga kerja bertambah 1 orang, maka akan diperoleh tambahan output sebesar 150 kg semen (jika input yang lain tetap). Sedangkan MP modal adalah 5, artinya bila modal bertambah sebesar seribu rupiah, maka akan diperoleh tambahan output sebesar 5 kg semen (jika input yang lain tetap).

2. Model Fungsi Produksi Cobb Douglas

Fungsi produksi yang berbentuk tidak linear berarti bahwa fungsi tidak berupa garis lurus. Namun, dengan transformasi *ln*, model juga dapat menjadi linear. Model fungsi Cobb Douglas adalah sebagai berikut:

a. Y = $\beta_0 X^{\beta_1} e^{\varepsilon}$ apabila hanya terdapat sebuah input

b. Y = $\beta_0\, X_1^{\beta_1}\, X_2^{\beta_2} e^{\varepsilon}$ apabila terdapat dua buah input

Model tersebut dapat dilinearkan dengan transformasi *ln* sehingga modelnya menjadi:

$\ln(Y) = \ln(\beta_0) + \beta_1 \ln(X_1) + \beta_2 \ln(X_2) + \varepsilon$

Apabila ln(Y) = Y^*; $\ln(\beta_0)$ = β_0^*, $\ln(X_1)$ = X_1^*, serta $\ln(X_2)$ = X_2^*, maka modelnya menjadi sebagai berikut:

$$Y^* = \beta_0^* + \beta X_1^* + \beta_2 X_2^* + \varepsilon$$

Model tersebut sudah linear. Sedangkan koefisien regresi merupakan besaran elastisitas produksi, yaitu persentase perubahan output sebagai akibat berubahnya input sebesar satu persen.

Secara matematika ekonomi, besaran elastisitas dapat diperoleh dengan persamaan berikut:

$$E_{X_1} = \frac{MP_{X_1}}{AP_{X_1}}$$

AP adalah produk rata-rata (*Average Product*) untuk input X_1 yang diperoleh dari persamaan berikut:

$$AP_{X_1} = \frac{Y}{Y_1}$$

Dengan demikian, persamaan elastisitas produksi untuk input X, adalah sebagai berikut :

$$E_{X_1} = \frac{MP_{X_1}}{AP_{X_1}} = \frac{\partial Y / \partial X_1}{Y / X_1} = \frac{\beta_1 \beta_0 \ X_1^{\beta_1 - 1} \ X_2^{\beta_2} e^{\varepsilon}}{Y / X_1} =$$

$$\frac{\beta_1^* X_1^{-1} \ X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} e^{\varepsilon}}{Y / X_1} \ \frac{\beta_1 X_1^{-1} YX_1}{Y} = \beta 1$$

Jika dalam suatu proses produksi semen:

output (Y) = banyaknya semen yang dihasilkan (kg)

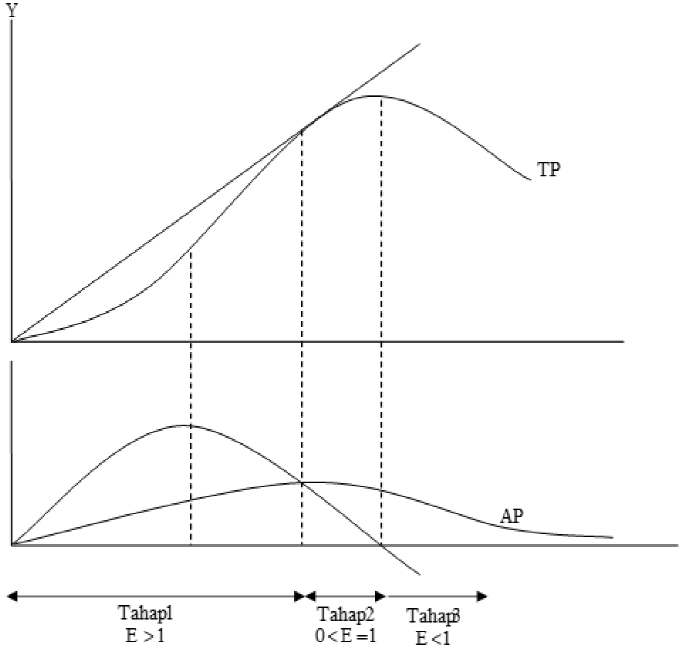
input (X_1) = penggunaan tenaga kerja (orang)

(X_2) = penggunaan modal (dalam ribuan rupiah)

maka formulasi modelnya adalah sebagai berikut:

$$Y = \beta_0 \ X_1^{\beta_1} \ X_2^{\beta_2} e^{\varepsilon}$$

Seandainya dan hasil estimasi model diperoleh dugaan fungsi produksi $\hat{Y} = 0{,}75 \ X_1^{0,5} \ X_2^{1,2}$, model tersebut menunjukkan bahwa elastisitas produksi (E) untuk input tenaga kerja adalah 0,5. Artinya, apabila dalam proses produksi tersebut jumlah tenaga kerja bertambah sebesar 1%, maka akan diperoleh tambahan output semen sebesar 0,5% (jika input yang lain tetap). Sedangkan elastisitas produksi untuk modal adalah l,2. Artinya, apabila modal bertambah sebesar 1%, maka akan diperoleh tambahan output semen sebesar 1,2% kg semen (jika input yang lain tetap).



Gambar 5.2 Tahapan dari fungsi produksi

Analisis lebih lanjut tentang elastisitas dapat digunakan untuk melihat skala produksi berikut:

a. *increasing return to scale*, $\beta_1 + \beta_2 > 1$

b. *constant return to scale*, $\beta_1 + \beta_2 = 1$

c. *decreasing return to scale*, $\beta_1 + \beta_2 < 1$

3. Fungsi Produksi Polinomial

Pada umumnya, fungsi produksi mengikuti Hukum Kenaikan yang Semakin Berkurang (*The Law of*

Diminishing Return), yaitu hukum yang menyatakan berkurangnya tambahan output dari penambahan satu unit input pada saat output telah mencapai tingkat maksimum. Awalnya akan terjadi *increasing return*, kemudian jika input ditambah akan terjadi *decreasing return*, dan jika input masih ditambah, maka output akan mencapai tingkat maksimum dan selanjutnya, bertambahnya input justru membuat output menjadi berkurang. Agar lebih jelas, perhatikan Gambar 3.2. Oleh karena itu, untuk menjelaskan fenomena fungsi produksi, model polinomial derajat 2 (kuadratik) atau derajat 3 (kubik) akan digunakan. Ada tiga tahapan (daerah) dalam suatu proses produksi, yaitu:

a. Tahap 1

Tahap 1 adalah suatu tahapan dengan elastisitas produksi yang lebih besar dari 1 (disebut elastis). Makna dari tahap 1 adalah penggunaan input masih perlu ditambah agar dapat masuk ke tahap (daerah) 2.

b. Tahap 2

Tahap 2 adalah suatu tahapan dengan elastisitas produksi yang terletak antara nol dan satu. Tahap ini disebut daerah rasional, yaitu suatu daerah yang memungkinkan untuk mendapatkan keuntungan maksimal.

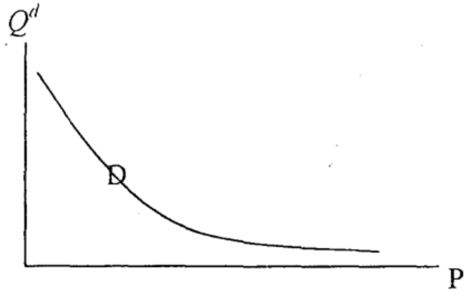
c. Tahap 3

Tahap 3 adalah suatu tahapan dengan produksi total (*Total Product* = TP) yang sudah mencapai titik maksimum sehingga MP menjadi negatif dan E < 0. Pada tahap ini, penggunaan input sudah tidak efisien sehingga perlu dikurangi agar masuk daerah rasional (tahap 2).

5.3 Fungsi Permintaan

Menurut hukum permintaan, jumlah barang yang diminta berbanding terbalik dengan harganya. Artinya, jika harga barang naik, permintaan terhadap barang tersebut akan turun, dengan syarat bahwa faktor-faktor yang lain tidak berubah (*ceteris paribus*). Secara matematis, hukum tersebut dapat dinotasikan dengan persamaan berikut:

$Q^d = f(P)$



Gambar 5.3 Fungsi permintaan

Selain harga barang (P_x), juga terdapat beberapa faktor yang turut mempengaruhi besarnya permintaan terhadap suatu barang, yaitu harga barang yang bersangkutan (P_x), harga barang substitusi/kompetitor

(P_y), harga barang komplemen selera masyarakat *taste* (t), serta pendapatan masyarakat (Y).

$Q_{dx} = f(P,P,P,t,Y)$

Hubungan antara permintaan dengan faktor-faktor yang memengaruhi dapat bersifat linear maupun nonlinear (Cobb Douglas).

1. Fungsi Permintaan Linear

   Model matematisnya adalah sebagai berikut:

   $$Q_x^d = \beta_0 + \beta_1 P_x + \beta_2 P_y + \beta_3 P_c + \beta_4 t + \beta_5 Y + \varepsilon$$

2. Fungsi Permintaan Nonlinear

   Model nonlinear pada fungsi permintaan umumnya adalah model eksponensial. Persamaannya adalah sebagai berikut:

   $$Q_x^d = \beta_0 P_x^{\beta_1} P_y^{\beta_2} P_c^{\beta_3} t^{\beta_4} Y^{\beta_5} e^{\varepsilon}$$

   Pada model ini, koefisien regresi merupakan besaran elastisitas untuk masing-masing variabel.

   a. β_1 adalah besarnya elastisitas harga untuk permintaan (*own price elasticity*), yaitu besaran yang menunjukkan persentase perubahan permintaan sebagai akibat berubahnya harga barang sebesar 1 %.

   b. β_2 adalah besarnya elastisitas harga barang substitusi untuk permintaan (*cross price elasticity*), yaitu besaran yang menunjukkan persentase perubahan permintaan sebagai akibat berubahnya harga barang substitusi sebesar 1%.

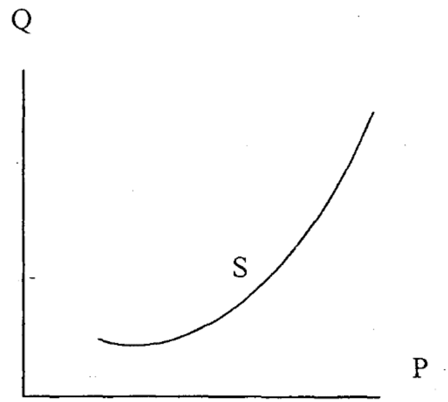
c. β_3 adalah besarnya elastisitas harga barang komplementer untuk permintaan (*cross price elasticity*), yaitu besaran yang menunjukkan persentase perubahan permintaan sebagai akibat berubahnya harga barang komplemen sebesar 1%.

d. β_4 adalah besarnya elastisitas selera masyarakat untuk permintaan, yaitu besaran yang menunjukkan persentase perubahan permintaan sebagai akibat berubahnya selera masyarakat sebesar 1%.

e. β_5 adalah besarnya elastisitas pendapatan untuk permintaan (*income elasticity*), yaitu besaran yang menunjukkan persentase perubahan permintaan sebagai akibat berubahnya pendapatan masyarakat sebesar 1%.

5.4 Fungsi Penawaran

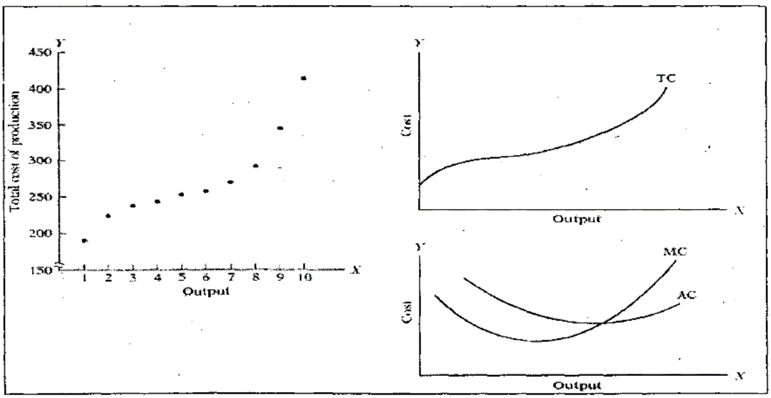
Fungsi penawaran adalah fungsi yang menunjukkan hubungan antara jumlah barang yang ditawarkan dengan harganya (*ceteris paribus*). Hukum penawaran berbunyi jumlah barang yang ditawarkan (Q^s) berbanding terbalik dengan harganya (P)".



Gambar 5.4 Fungsi penawaran

5.5 Fungsi Biaya

Biaya total (*Total Cost*, TC) merupakan fungsi dan output (Q) yang dihasilkan. Secara matematis, biaya total dilambangkan dengan persamaan $TC = f(Q)$.



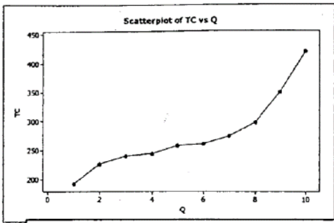
Gambar 5.5 Fungsi biaya: *Total Cost* (TC), *Marginal Cost* (MC), dan *Average Cost* (AC)

Pada umumnya, fungsi biaya ini tidak linear, melainkan polinomial. Sebagai ilustrasi, lihat Gambar 3.5, yang merupakan hubungan antara *Total Cost*, *Marginal Cost*, serta *Average Cost*. Perhatikan juga data pada Tabel 6.1 yang menyajikan ilustrasi hubungan antara TC dengan Q. Sedangkan Tabel 6.2 menyajikan hasil pengolahan komputer dengan Minitab. Dari fungsi biaya tersebut, fungsi *Marginal Cost* dan *Average Cost* akan dapat dicari.

Tabel 5.1 Data *Total Cost* dan output

Q	TC
1	193
2	226
3	240
4	244
5	257
6	260
7	274
8	297
9	350
10	420

Tabel 5.2 Fungsi biaya hasil pengolahan komputer



Regression Analysis: TC versus Q, Q2, Q3

```
The regression equation is
TC = 142 + 63.5 Q - 13.0 Q² + 0.940 Q³

Predictor       Coef    SE Coef        T       P
Constant     141.767      6.375    22.24   0.000
Q             63.478      4.779    13.28   0.000
Q²          -12.9615     0.9857   -13.15   0.000
Q³           0.93959    0.05911    15.90   0.000
S = 3.28491    R-Sq= 99.8%
R-Sq(adj) = 99.8%
Analysis of Variance
Source           DF      SS      MS         F       P
Regression        3   38918   12973   1202.22   0.000
Residual Error    6      65
Source    DF   Seq SS
Q          1    32780
Q²         1     3411
Q³         1     2727
```

5.6 Model Pertumbuhan Penduduk

Model pertumbuhan penduduk menggunakan persamaan (1) $N_t = N_0(1 + r)^t$ dan (2)$N_t = N_0e^{rt}$

Dengan :

N_t = jumlah penduduk waktu ke-t

N_0 = jumlah penduduk awal (mula-mula)

r = laju pertumbuhan penduduk

t = waktu

Untuk menyelesaikan persoalan, persamaan tersebut akan diubah menjadi ln.

$\ln N_t = \ln N_0 + t \ln(1 + r)$

Apabila $\ln N_t = Y$, $\ln N_0 = \beta_0$, dan $\ln(1+r) =$ maka modelnya menjadi $Y = \beta_0 + \beta_1 t$ dan model ekonometrikanya menjadi $Y = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon$.

Tabel 5.3 Jumlah penduduk di suatu negara

Tahun	Jumlah Penduduk	Tahun	Jumlah Penduduk
1	205.052	16	238.466
2	207.661	17	240.651
3	209.896	18	244.804
4	211.909	19	245.021
5	213.854	20	247.342
6	215.973	21	249.948
7	218.035	22	252.639
8	220.239	23	255.374
9	222.585	24	258.083
10	225.055	25	260.599
11	227.726	26	263.044
12	229.966	27	265.463
13	232.199	28	268.008
14	234.307	29	270.561
15	236.348	30	273.131

Tabel 5.4 Model pertumbuhan penduduk hasil pengolahan komputer

Regression Analysis: ln Yt versus t

```
The regression equation is
ln Nt=Yt = 12.2 + 0.00981 t


Predictor          Coef      SE Coef         T      P
Constant        12.2249       0.0008  15804.57  0.000
t            0.00980978   0.00004357    225.15  0.000


S = 0.00206559   R-Sq = 99.9%   R-Sq(adj) = 99.9%


Analysis of Variance

Source          DF       SS       MS         F      P
Regression       1  0.21628  0.21628  50691.07  0.000
Residual Error  28  0.00012  0.00000
Total           29  0.21640


Unusual Observations

Obs     t    ln Yt      Fit  SE Fit  Residual  St Resid
 18  18.0  12.4082  12.4015  0.0004    0.0067     3.31R
```

5.7 Model Ekonomi Makro

Model ekonomi makro merupakan model ekonometrika yang berkenaan dengan fenomena ekonomi makro. Beberapa model (fungsi) ekonomi makro adalah (1) fungsi pendapatan nasional, (2) jumlah uang beredar (fungsi permintaan uang), (3) fungsi konsumsi agregat, dan lain-lain.

5.7.1 Fungsi Pendapatan Nasional

Model persamaan berikut akan digunakan untuk menggambarkan determinan pendapatan nasional sederhana (tertutup) secara matematis.

$$C_t = \alpha + \alpha_1 Y + \alpha_2 C_{t-1} + \varepsilon_{1t}$$

$$I_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \beta_2 Y_{t-1} + \beta_3 R_{t-1} + \varepsilon_{2t}$$

$$Y = C + I + G$$

Dengan :

C = pengeluaran konsumsi

Y = pendapatan nasional (GNP)

G = pengeluaran pemerintah

I = investasi

R = tingkat suku bunga

5.7.2 Fungsi Permintaan Uang

Permintaan uang atau disebut juga jumlah uang beredar (M) menurut teori Keynesian dipengaruhi oleh pendapatan nasional (Y) dan tingkat suku bunga (r). Hubungan antara jumlah uang beredar dengan pendapatan adalah positif, artinya apabila pendapatan naik, maka permintaan uang akan meningkat untuk berbagai transaksi pembelian barang. Sedangkan hubungan tingkat suku bunga dengan jumlah uang beredar adalah negatif. Secara matematis, model permintaan uang adalah sebagai berikut:

$$M_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \beta_2 R_1 + \varepsilon$$

5.8 Beberapa Model Lain

1. $Y_1 = \beta_1 + \beta_2 \left(\frac{1}{X_1} \right) + u_t$ *reciprocal*
2. $Y_1 = \beta_1 + \beta_2 \ln X_t + u_t$ *semilogarithmic*
3. $\ln Y_1 = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$ *inverse semilogarithmic*
4. $\ln Y_1 = \ln \beta_1 + \beta_2 \ln X_t + u_t$ *logarithmic* atau *double logarithmic*
5. $\ln Y_1 = \beta_1 - \beta_2 \left(\frac{1}{X_1} \right) + u_t$ *logarithmic reciprocal*

TEST FORMATIF

1. Fungsi produksi mempunyai 2 buah input, yaitu tenaga kerja (L) dan modal (K) Data hubungan antara output dengan tenaga kerja dan modal disajikan pada Tabel 5.5

Tabel 5.5 Output, tenaga kerja, dan modal

Tahun	Y	L	K
1958	16607.7	275.5	17803.7
1959	17511.3	274.4	18096.8
1960	20171.2	269.7	18271.8
1961	20932.9	267	19167.3
1962	20406	267.8	19647.6
1963	20831.6	275	20803.5
1964	24806.3	283	22076.6
1965	26465.8	300.7	23445.2
1966	27403	307.5	24939
1967	28628.7	303.7	26713.7
1968	29904.5	304.7	29957.8
1969	27508.2	298.6	31585.9
1970	29035.5	295.5	33474.5
1971	29281.5	299	34821.8
1972	31535.8	288.1	41794.3

Apabila digunakan model Cobb-Douglas untuk memperkirakan fungsi produksi untuk mengetahui hubungan antara input dengan output, lakukan pengujian, apakah perusahaan dalam keadaan *constant return to scale*?

2. Data sebuah fungsi produksi hubungan antara input (tenaga kerja) dengan output (Y) disajikan pada Tabel 5.6

Tabel 5.6 Hubungan antara output dengan tenaga kerja

Tenaga Kerja (jam)	Output (unit)
0	0
75	10
150	40
225	75
300	107
375	120
450	126
525	130
600	132
675	130
750	125

Pertanyaan :

a. Gambarkan fungsi produksi tersebut, apakah memenuhi hukum kenaikan yang semakin berkurang? Jelaskan alasannya!

b. Berapa besar inputnya jika perusahaan berada dalam keadaan *decreasing rate*?

c. Kapan terjadi pengangguran tidak kentara (*disguised unemployment*)?

3. Dari hasil perhitungan diperoleh Perkiraan fungsi biaya berikut :

$$TC = \hat{C} = 5 + 10Q - 0{,}9Q^2 + 0{,}04Q^3$$

Apabila perusahaan berada pada pasar persaingan sempurna (harga tetap) dengan harga 4 juta rupiah per unit barang, berapakah besarnya barang yang harus diproduksi agar perusahaan memperoleh keuntungan maksimum?

Soal Pilihan Ganda

Pilihlah jawaban

1. Fungsi yang menunjukkan hubungan fisik antara output dengan input disebut?
   a. fungsi produksi
   b. fungsi biaya
   c. fungsi Cobb-Douglas
   d. fungsi penawaran
2. Bila dalam fungsi produksi digunakan model Cobb-Douglas, maka koefisien regresi yang diperoleh merupakan besaran?
   a. produksi marginal
   b. produksi rata-rata
   c. elastisitas produksi
   d. produksi total
3. Tahap pada fungsi produksi yang dianggap rasional adalah:
   a. Tahap dengan elastisitas produksi Ep < 0
   b. Tahap dengan elastisitas produksi 0 < Ep < 1
   c. Tahap dengan elastisitas produksi Ep > 0
   d. Tahap dengan elastisitas produksi Ep = 0
4. Pertumbuhan penduduk umumnya menggunakan model $N_t = N_0e^{1t}$, dengan

   Nt = jumlah penduduk pada waktu ke-t

   N_0 = jumlah penduduk pada tahun awal

Laju pertumbuhan penduduk ditentukan oleh besaran?

a. e

b. r.t

c. t

d. r

5. Bila pada perkiraan fungsi biaya total

$TC = \hat{C} = 5 + 10Q - 0{,}9Q^2 + 0{,}04Q^3$

maka:

a. 5 disebut biaya variabel

b. $10Q - 0{,}9Q^2 + 0{,}04Q^3$ disebut biaya tetap

c. $10 - 1{,}8Q + 0{,}12Q^2$ disebut biaya marginal

e. $10 - 0{,}9Q + 0{,}04Q^2$ disebut biaya rata-rata

Kunci Jawaban

1. a
2. c
3. b
4. d
5. c

Daftar Pustaka

Adadani, Sukhatma "Sampel dan Probability". Replesment, R.D, 1973.

Amudi Pasariba "Pengantar Statistika" Jakarta 1981.

Dep P & K "Matematika Jilid 10 Teori Kemungkinan". BPG. Tertulis, Bandung, 1987.

Graybill, F. A "An Introduction to Human Statistical Model" New York, MC. Hill Book Graw, 1991.

Gujarati D.N. 2004. *Basic Econometrics*. Edisi ke-4. New York: McGraw-Hill. Companies.

Gujarati, D.N. *Basic Econometrics.* Edisi ke-4. New York : McGraw-Hill Companies.

Hannan, E.J. "Time Series Analysis", London, Methuen, 1960.

Himmelblau. D.M. "Proses Analysis by Statistical Methods" New York Welry 1970.

Koutsoyiannis, A. 1978. *Theory of Econometrics*. Edisi ke-2. New York: Harper & Row Publisher Inc.

Koutsoyiannis, A.1978. *Theory of Econometrics.* Edisi ke-2. New York : Harper & Row Publisher Inc.

Nec, N.H. SPSS “Statistika Pac for Social Sciences” New York MC Grond Hill Book 1975.

Neter, J and W. Wesserman “Applied Linear Statistical Model” Homeword, Imvin 1974.

Saeymore Hepschuz “Probability” Schaum Out. Kene Serees, New York, Componi 1983.

Snededor, G. W “Statistikal Methode” Iowa State University Press Amus, Edisi Keenam, 1977.

Sujana “Metode Statistika” Bandung 1986.

Sutrisno Hadi “Statistika 1,2 dan 3” Yayasan Penerbit Fakultas Psikologi UGM Yogyakarta, 1992

Zansawi Soejati “ Materi Pokok Metode Statistika” Karunika, UT, Jakarta 1985.

Zarkoric, SS “On the efficiency of sampling with various profanities and the selection of unit with replacement” Matrika 1983.

Profil Penulis

Dr. Drs. I Wayan Sudiarsa, M.Stats, lahir di Gianyar, 18 April 1960, Riwayat Pendidikan SD di Kabupaten Gianyar, STN dan STM Negeri di Kabupaten Badung. Kemudian melanjutkan pendidikan di Fakultas Teknik Arsitektur UNUD sampai memperoleh gelar Sarjana Muda Arsitektur tahun 1983. Selanjutnya menempuh pendidikan di FKIP Unmas Denpasar Program Study Pendidikan Matematika sampai memperoleh gelar Sarjana (S1) dokterandus, tahun 1986. Setelah itu penulis bekerja di Biro Konsultan dan Perencanaan CV Cipta serta Kontraktor CV Maya & Co sampai 1988. Penulis juga menjadi guru honor di SLUA Saraswati 1 Denpasar. Pada saat bersamaan penulis juga sebagai Dosen Honor pada Perguruan Tinggi Swasta di Bali Teknik UNR, Unwar dan Unmas Denpasar serta IKIP PGRI Bali sampai tahun 1991. Pada bulan Maret 1991 penulis diangkat sebagai Dosen PNS pada Kopertis Wilayah VIII Bali, NTB dan NTT dipekerjakan pada IKIP PGRI Bali yang sekarang meningkat status menjadi Universitas PGRI Mahadewa Indonesia. Tahun 1998-1999 penulis mendapat beasiswa dari Bank Dunia untuk melanjutkan study Pra

Pascasarjana Statistika di Institut Negeri Pertanian Bogor (IPB). Kemudian tahun 2000-2002 penulis mendapat beasiswa BPDN Dikti untuk melanjutkan study Pascasarjana di Institut Teknologi Sepuluh November (ITS) Surabaya Prodi Ilmu Statistika. Tahun 2013-2018 penulis mendapat beasiswa BPDN Dikti untuk melanjutkan study Doktor Pascasarjana di Institut Teknologi Sepuluh November (ITS) Surabaya dengan gekar Doktor (Dr.).

Penulis mengampu mata kuliah Statistika Dasar, Statistika Matematika 1 dan 2, Statistika Lanjutan, Statistika Komputasi, Analisis Regresi, Matematiks Dasar dan Kalkulus 1 dan 2 serta Persamaan Defferensial.

Penulis sudah menulis beberapa Modul Perkuliahan dan Buku Ajar, Kalkulus 1 dan 2, Statistika Dasar Microteaching, Matematika 1, Logika Matematika. Tulisan ilmiah yang dipublikasikan berbagai jurnakl nasional dan internasional, serta seminar nasional maupun internasional. Silakan bagi anda yang ingin menanyakan beberapa hal terkait dengan buku ini, atau berupa saran dan masukannya untuk revisi buku ini pada edisi selanjurnya. Anda bisa mengirimkan ke email : wayansudiarsa1804@gmail.com atau wsudiarsa72@yahoo.com

Dr. Ni Putu Ayu Mirah Mariati, S. Si., M. Si., lahir di Gianyar, 17 Maret 1991. Riwayat Pendidikan sekolah dasar di SD Saraswati 5 Denpasar (1997-2003), kemudian melanjutkan di SMP Negeri 1 Denpasar (2003-2006) dan SMA Negeri 1 Denpasar (2006-2009). Selanjutnya, pada tahun 2013 putri dari I Wayan Sudiarsa dan Ni Ketut Martini ini menyelesaikan pendidikan Strata I dengan predikat *cumlaude* di Jurusan Matematika, Universitas Udayana. Pada tahun yang sama, penulis memperoleh beasiswa BPPDN calon dosen untuk melanjutkan Strata II di Jurusan Statistika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya dan menyelesaikannya dengan predikat *cumlaude* pada 2015. Pada saat bersamaan penulis juga sebagai Dosen pada Perguruan Tinggi Swasta di Bali yaitu IKIP PGRI Bali (2015-2017), dan saat ini menjadi dosen tetap di Universitas Mahasaraswati Denpasar. Tahun 2017-2021 penulis mendapatkan beasiswa BPPDN untuk melanjutkan studi Strata III di Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya dengan gelar Doktor (Dr.). Penulis mengampu mata kuliah Statistika Ekonomi, Inferensia Statistika Ekonomi, Aplikasi Analisis Kuantitatif, Matematika Ekonomi, Statistika Matematika 1 dan 2, Statistika Lanjutan, Statistika Komputasi dan Analisis Regresi. Penulis aktif dalam penelitian yang dipublikasikan di berbagai jurnal nasional dan internasional, serta prosiding dalam seminar nasional maupun internasional. Silakan bagi anda yang ingin menanyakan beberapa hal terkait dengan buku ini, atau berupa saran dan masukannya untuk revisi buku ini pada edisi selanjurnya. Anda bisa mengirimkan ke email : ayumirahmariati@unmas.ac.id atau ayumirahmariati@gmail.com.

I Komang Sukendra, S.Pd., M.Si., M.Pd. Lahir 02 Agustus 1970 di Bugbug Kecamatan Karangasen, Kabupaten Karangasen Provinsi Bali. Putra dari pasangan I Ketut Kantun dan Ni Wayan Kupit. Menempuh pendidikan S1 STKIP Negeri Singaraja Bali Jurusan Pendidikan Matematika (1990-1996), S2 Universitas Mahasaraswati Denpasar Jurusan Perencanaan Pembangunan Wilayah dan Pengelolaan Lingkungan (2008-2010), S2 Universitas Ganesha (Undiksha) Jurusan Pendidikan Matematika (2012-2014); Sedang S3 di Undiksha, Ilmu Pendidikan Kosentrasi Pendidikan Matematika (2018-sekarang)

Pengalaman: (1) Sebagai Dosen di IKIP PGRI Bali di Pendidikan Matematika, (2)

Sebagai Tutor di Universitas Tebuka dari tahun 2018 sampai sekarang. (3) Sekretaris LP2M IKIP PGRI Bali periode 2016-2019 dan Periode 2019-2020 , (4) Sekretaris LPPM dan Majalah di Universitas Mahadewa Indonesia periode 2020-2021. (5) Sekretaris L3PM di Universitas Mahadewa Indonesia periode 2021-2024.