Kalkulus I
Berbantuan Geogebra

Disertai tautan aplikasi GeoGebra yang digunakan dalam lembar kerja

Kalkulus I Berbantuan Geogebra

Disertai tautan aplikasi GeoGebra yang digunakan dalam lembar kerja

Ni Ketut Erawati

Kalkulus I Berbantuan Geogebra

Disertai tautan aplikasi GeoGebra yang digunakan dalam lembar kerja

Ni Ketut Erawati

Diterbitkan Oleh:
Mahameru Press

Desain Cover : Mahameru Team
Editor : Teddy Fiktorius
Layouter : Moon

Terbit: Agustus 2020
ISBN: 978-623-6567-52-4

Lembar Persembahan

Buku ini saya persembahkan untuk keluarga kecil saya yang telah mendukung saat-saat tersulit dalam proses penyusunan buku ini. Meninggalkan si kecil (Kanna) yang baru beberapa bulan di tangan sang Ayah (Win), begadang di saat si kecil sedang tidur, dan akhirnya terbayar dengan adanya buku ini. Tidak lupa juga kuucapkan terima kasih pada adik sepupu (Unick) yang sangat membantu dalam proses pengetikan yang penuh dengan simbol-simbol sehingga limit waktu dapat terkejar. Serta semua keluarga besar dan teman-teman yang telah mendukungku menyelesaikan buku ini, terima kasih.

Kata Pengantar
Pendiri G2M2
(fiktoriusteddy@gmail.com - 0852 4592 1881)

SALAM HEBAT!

Salam yang paling tepat untuk menyambut hadirnya buku "***Kalkulus 1 Berbantuan Geogebra***".

Andai saja rimba adalah pena dan samudra adalah tinta, pun tak akan cukup bagi kita untuk menuliskan betapa bersyukurnya kita masih dilimpahkan rahmat-Nya sehingga dapat berkarya dalam hidup ini. Buku ini merupakan karya nyata dari upaya penulis untuk mengukir namanya dalam peradaban ini. Ini lah insan yang senantiasa mengingat pesan almarhum Pramoedya Ananta Toer, penulis Indonesia.

"**Orang boleh pandai setinggi langit, tapi selama ia tidak menulis, ia akan hilang di dalam masyarakat dan dari sejarah. Menulis adalah bekerja untuk keabadian**."

Merupakan suatu kehormatan bagi saya untuk menjadi narasumber sekaligus pengisi lembar kata pengantar pada buku ini yang merupakan produk akhir dari sesi pendampingan penulisan naskah buku Gerakan Guru

Membaca dan Menulis (G2M2) pada Workshop Nasional Daring dengan tema “Guru Profesional Berani Publikasi Ilmiah” yang diselenggarakan oleh Lembaga Pengembangan Akademik (LPA) Universitas Mahadewa Indonesia pada tanggal 11 Juli 2020 sampai dengan 11 Agustus 2020.

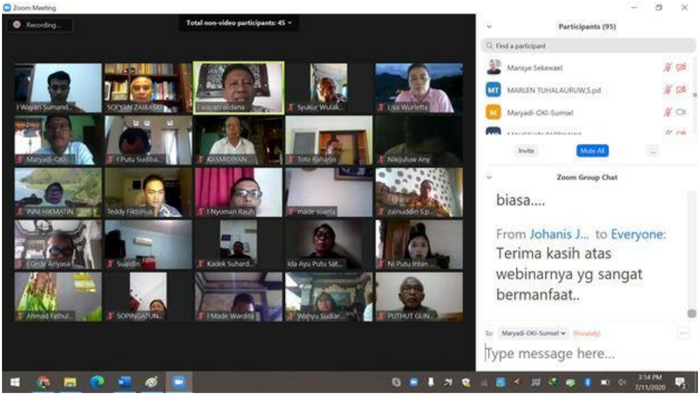
Teruntuk para pembaca yang budiman, selamat berliterasi ria. Semoga ‘Baca! Baca! Dan baca!’ menjadi slogan aktivitas intelektual Anda semua.

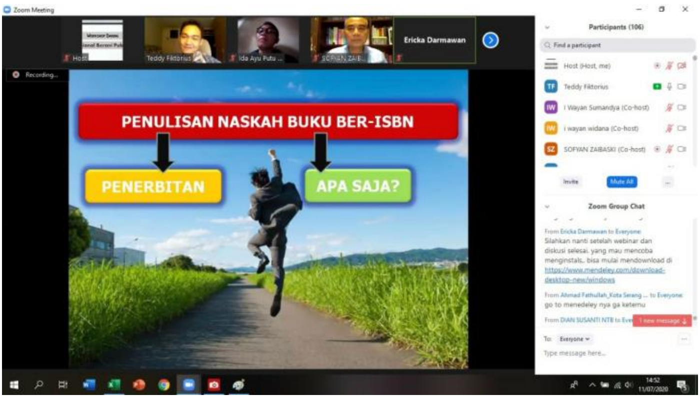
Teruntuk penulis, teruslah berkarya. Jadilah garda terdepan untuk menjaga obor literasi tetap menyala agar keberlangsungan peradaban kita tetap terjamin. Ingatlah senantiasa moto komunitas G2M2, **“Siang dan malam akan berlalu; namun tidak dengan tulisanku”**.

Pontianak, Agustus 2020

Teddy Fiktorius, M.Pd.

Suasana Workshop Nasional Daring dengan tema "Guru Profesional Berani Publikasi Ilmiah" yang diselenggarakan oleh Lembaga Pengembangan Akademik (LPA) Universitas Mahadewa Indonesia pada tanggal 11 Juli 2020


Zoom Meeting
Total non-video participants: 45
Participants (95)
Zoom Group Chat
biasa....
From Johanis J... to Everyone:
Terima kasih atas webinarnya yg sangat bermanfaat..
Type message here...


Zoom Meeting
Ericka Darmawan
Participants (106)
PENULISAN NASKAH BUKU BER-ISBN
PENERBITAN
APA SAJA?
Zoom Group Chat

Sekapur Sirih
Rektor Universitas Mahadewa Indonesia

"Menulis adalah sebuah kebutuhan agar otak kita tidak dipenuhi oleh feses pemikiran. Maka, menulislah. Entah itu di buku tulis, daun lontar, prasasti, atau bahkan media sosial, menulislah terus tanpa peduli karyamu akan dihargai oleh siapa dan senilai berapa."

Fiersa Besari-Penulis dan Pemusik dari Indonesia

UNESCO mempublikasi data statistik yang cukup mengejutkan pada tahun 2012. UNESCO menyebutkan bahwa indeks minat baca di Indonesia baru mencapai 0,001. Ini berarti bahwa dari setiap 1.000 penduduk Indonesia, hanya 1 orang saja yang memiliki minat baca! Kemudian, sebuah survei yang dilaksanakan oleh Central Connecticut State University pada tahun 2003 hingga 2004 menempatkan Indonesia pada peringkat 60 dari 61 negara terkait minat baca. Negara tercinta ini hanya unggul dari Botswana yang berada pada posisi buntut, yakni peringkat 61.

Meskipun pengertian literasi sudah berkembang pesat, aktivitas membaca dan menulis tetap tergolong pada literasi dasar yang perlu dikuasai oleh setiap individu untuk bertahan hidup. Membaca dipandang sebagai sebuah usaha untuk menggali ilmu. Ilmu tersebut seyogyanya perlu diikat dengan usaha literasi lainnya, yakni menulis. Penguatan budaya literasi adalah kunci untuk memajukan bangsa ini.

Suatu kebanggaan bagi saya untuk mengisi lembar sekapur sirih pada buku yang berjudul "***Kalkulus 1 Berbantuan Geogebra***" karya ***Ni Ketut Erawati***, seorang dosen di Universitas Mahadewa Indonesia. Buku informatif ini merefleksikan inspirasi dan motivasi bagi guru maupun dosen dalam merancang dan menyajikan pembelajaran yang bermakna dan efektif.

Kepada pendiri G2M2, Bapak Teddy Fiktorius, penghargaan setinggi-tingginya atas upaya dalam memotivasi dan menginspirasi para pendidik, baik guru maupun dosen, untuk menunaikan gerakan literasi secara nyata.

Kepada penulis, teruslah mengukir aksara. Jadilah ujung tombak dalam mengawal obor literasi tetap menyala sebagai bukti nyata kedigdayaan peradaban kita.

Kepada pembaca, selamat membaca, merenung, dan pada akhirnya menuangkan gagasan-gagasan baru dalam budaya literasi menulis secara nyata.

Bali, Agustus 2020

Dr. I Made Suarta, S.H., M.Hum.

PRAKATA

Puji syukur dipanjatkan kehadapan Tuhan Yang Maha Esa karena berkat rahmat-Nya buku yang berjudul “Kalkulus 1 Berbantuan *GeoGebra*” dapat diselesaikan. Penyusunan buku ini diperoleh sebagai hasil penelitian dalam menyelesaikan pendidikan di program Pasca Sarjana Universitas Pendidikan Ganesha Singaraja.

Buku ini memuat materi fungsi, limit fungsi, dan turunan dengan memanfaatkan media *GeoGebra* untuk membantu mahasiswa dalam mempelajari kalkulus 1. Sehingga sebelum mempelajari materi, mahasiswa akan diajak untuk mengenal dan mempelajari *GeoGebra* secara umum dengan adanya bagian “Pengantar *GeoGebra*” di awal buku ini. Untuk mendukung mahasiswa memahami konsep dalam kalkulus 1, sesuai dengan teori yang melandasi penyusunan buku ini, maka disediakan LKM (Lembar Kerja Mahasiswa) untuk mahasiswa serta tautan yang berisi program *GeoGebra* yang dirancang sesuai LKM yang membantu dalam penggunaan buku ini disertai pembahasannya. Penggunaan buku ini memerlukan perangkat lunak *GeoGebra* untuk hasil yang maksimal, dimana perangkat tersebut dapat diunduh secara gratis.

Harapan penulis, dengan adanya buku ini, mahasiswa dapat terbantu dalam menemukan dan memahami konsep dalam kalkulus 1, sehingga meningkatkan keaktifan dan kemampuan mahasiswa dalam kalkulus 1 secara khusus dan matematika secara umum.

Dengan segala kerendahan hati, penulis menyadari bahwa buku ini masih memiliki keterbatasan. Oleh karena itu, kritik dan saran dari pembaca sangat penulis harapkan untuk menjadikan buku ini sebagai buku yang pantas untuk dipublikasikan. Akhir kata, penulis ucapkan terima kasih.

Denpasar, Agustus 2020

Penulis

DAFTAR ISI

PENDAHULUAN

Buku ini memuat, materi kalkulus, LKM berupa lembar kerja berbantuan GeoGebra dan latihan soal serta pengantar *GeoGebra*. Pendekatan yang digunakan dalam pelaksanaan pembelajaran kalkulus 1 sesuai dengan buku ini adalah siklus ADL berdasarkan teori APOS dengan berbantuan *GeoGebra*. Pelaksanaannya mempunyai karakteristik sebagai berikut.

1. Memanfaatkan lembar kerja mahasiswa sebagai panduan aktivitas mahasiswa
2. Menggunakan teori APOS sebagai landasan dalam mengembangkan konstruksi mental individu. APOS singkatan dari *action* (aksi), *process* (proses), *object* (objek), *schema* (skema). *Action* dilakukan dengan melakukan respons terhadap petunjuk eksternal yang memberikan rincian mengenai langkah apa yang harus diambil, tercermin dalam aktivitas awal pada LKM. *Process* yaitu konstruksi internal yang dibuat dengan melakukan respons yang sama seperti pada saat aksi tapi dirasakan oleh individu sebagai hal yang internal dan dibawah kontrol individu sendiri. Process sudah mulai terjadi saat adanya diskusi dalam kelompok untuk menyelesaikan tugas dalam aktivitas pendahuluan. *Object* adalah tingkatan yang lebih dalam setelah proses dimana proses telah dirangkum menjadi sebuah objek kognitif yang ditunjukkan dengan kemampuan memberikan alasan atau penjelasan. *Object*

terjadi ketika diskusi kelas. *Schema* merupakan koleksi yang koheren dari aksi, proses, objek, dan skema lainnya, yang terhubung secara padu dan diorganisasi secara terstruktur dalam pikiran individu. *Schema* tercermin saat mahasiswa mengerjakan latihan.

3. Teori APOS disini diimplementasikan dengan siklus ADL (aktivitas, diskusi, latihan).
4. Pemanfaatan GeoGebra dalam setiap siklus menambah keaktivan individu dan membangun suasana yang tidak monoton dan kondusif.

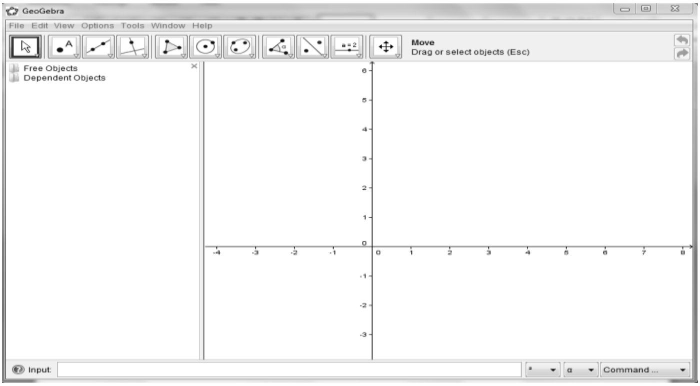
Pembaca boleh menggunakan pendekatan lain dalam melaksanakan pembelajaran di kelas. Selain itu tautan yang ada dalam setiap LKM akan membantu pembaca dalam belajar secara mandiri, tentunya dengan mengunduh program GeoGebra terlebih dahulu.

PENGANTAR GEOGEBRA

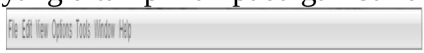
Geogebra adalah software matematika dinamis yang menggabungkan geometri, aljabar, dan kalkulus. Software ini dikembangkan untuk proses belajar mengajar matematika di sekolah oleh Markus Hohenwarter di Universitas Florida Atlantic tahun 2008. Di satu sisi, Geogebra adalah sistem geometri dinamik, dimana pengguna dapat melakukan konstruksi dengan titik, vektor, ruas garis, garis, irisan kerucut, begitu juga dengan fungsi, dan mengubah hasil konstruksi selanjutnya. Di sisi lain, persamaan dan koordinat dapat dimasukan secara langsung. Jadi, Geogebra memiliki kemampuan menangani variabel untuk angka, vektor, titik, menemukan turunan dan integral, menentukan akar serta nilai ekstrim dari suatu fungsi.

Dalam buku pengantar geogebra ini, dibahas secara umum mengenai *tools* serta fungsinya untuk membantu pengguna pemula dalam menggunakan geogebra. Pertama yang harus dilakukan adalah menginstal software geogebra ke dalam PC. Geogebra adalah suatu aplikasi yang bersifat *open source* dan gratis yang tersedia di www.geogebra.org. Dengan mendownload file di www.geogebra.org kemudian menginstal di PC maka geogebra sudah bisa digunakan.

Keuntungan jika kita mengunduh melalui website ini adalah kita akan memperoleh aplikasi yang selalu terbaru, dan selanjutnya dapat kita gunakan secara *off-line*. Selanjutnya dengan membuka program geogebra pada PC sehingga tampil jendela kerja seperti di bawah ini.



Belahan kotak kiri adalah panel kerja, yang menunjukkan semua perintah yang kita masukan, sedangkan belahan kotak kanan adalah panel gambar, yang merespon setiap perintah yang kita masukan dalam tampilan gambar. Sekarang akan dibahas fungsi *tools* yang ditampilkan pada gambar diatas.

1. 

Tampilan paling atas dari lembar kerja geogebra adalah menu seperti kolom di atas. Adapun bagian dan fungsi dari menu-menu tersebut sebagai berikut.

a. *File* (berkas) terdiri dari : new window (membuka jendela lembar kerja baru), open (membuka file), save dan save as (menyimpan berkas yang telah dibuat), export (mengubah tampilan dalam format lain), dan print (mencetak lembar kerja).

b. *Edit* (ubah) yang terdiri dari undo (membatalkan perintah), redo (melanjutkan perintah), delete (menghapus perintah), select (memilih perintah/objek), dan object properties (property objek yang bisa diubah sesuai keinginan pengguna dan pilihan yang tersedia).

c. *View* (tampilan) berkaitan dengan tampilan dari objek yang dibuat. Bagian dari menu ini yaitu : axes (tampilan sumbu koordinat tanpa skala satuan), grid (tampilan sumbu koordinat dengan skala satuan), algebra view (tampilan aljabar yang dikerjakan), construction protocol (protocol kontruksi perintah) dan navigation bar (navigasi perintah).

d. *Option* (opsi) berkaitan dengan pilihan yang dilakukan terhadap perintah yang dikerjakan atau objek yang ditampilkan.

e. *Tools* (peralatan), pada bagian ini kita dapat membuat objek (create) dan mengatur objek (manage).

f. *Window* (jendela) menunjukkan jendela kerja, jika ingin menampilkan jendela baru dapat dipilih new window pada menu ini.

g. *Help* (bantuan) menyediakan pili han bantuan tentang geogebra, yang biasanya memerlukan koneksi internet untuk dapat tersambung ke geogebra forum atau ke www.geogebra.org.

2. 

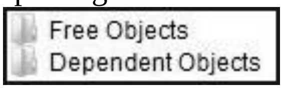
Kolom ini terletak di bagian pojok kanan bawah yang disebut *drop down*, disini terdapat perintah-perintah masukan dan simbol-simbol untuk membantu pengguna memasukan perintah pada bilah masukan dengan mengklik tanda panah ke bawah pada salah satu kotak dan memilih perintah yang ingin dipakai

3. 

Tanda ini menunjukkan *undo redo* untuk membatalkan/melanjutkan perintah. Tanda panah ke kiri merupakan undo (membatalkan perintah) dan tanda panah ke kanan adalah redo (melanjutkan perintah).

4. 

Tampilan ini terletak paling bawah, pada kolom ini pengguna mengetik perintah masukan, kemudian dengan menekan "enter", maka akan ditampilkan dalam panel gambar.

5. 

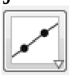
Pada bagian ini akan muncul perintah-perintah yang telah dimasukkan. Kita juga bisa menghapus perintah yang ada dari bagian ini dengan mengklik perintah yang ingin dihapus, kemudian dari menu "edit" pilih "hapus", atau klik kanan pada mouse, pilih "hapus".

6. 

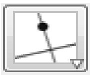
Bagian yang banyak digunakan dalam mengubah tampilan secara langsung dapat dipilih di bagian ini, adapun fungsinya masing-masing sebagai berikut.

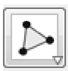
a.  *Move* (pindahkan). Mode ini digunakan untuk mengubah letak tampilan secara dinamis. Pada mode ini anda dapat men-*drag* dan menempatkan suatu objek bebas dengan *mouse*. Jika anda memilih suatu objek dengan mengkliknya pada mode *Pindah*, anda dapat menghapusnya dengan menekan tombol *Del* atau memindahkannya dengan menggunakan tombol panah. Tanda panah ke bawah menyediakan pilihan perintah terkait pemindahan objek.

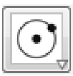
b.  **Titik baru.** Pada mode ini untuk membuat titik sudut yang nantinya bisa digunakan untuk membentuk poligon jika titik-titik tersebut dihubungkan. Pengklikan pada panel gambar akan membuat suatu titik baru. Tanda panah ke bawah menyediakan pilihan perintah terkait pembuatan titik seperti titik potong dua objek atau titik tengah antara dua objek

c.  Tanda ini untuk membuat suatu garis dari dua titik.

Tanda panah ke bawah menyediakan pilihan perintah terkait pembuatan garis seperti ruas garis antara dua titik, sinar garis dan vektor.

d.  Tanda ini digunakan untuk membuat garis melalui suatu titik yang tegak lurus garis lain. Tanda panah ke bawah menyediakan pilihan perintah terkait pembuatan garis yang sejajar, garis bagi, garis singgung dan lokus.

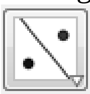
e.  Perintah untuk membuat polygon. Klik paling sedikit tiga titik yang akan menjadi titik sudut dari poligon. Lalu klik lagi titik awal untuk menutup poligon tersebut.

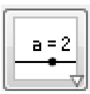
f.  Lingkaran untuk membuat suatu lingkaran dengan jari-jari tertentu. Pengklikan suatu titik *M* dan suatu titik

P mendefinisikan suatu lingkaran dengan pusat *M* melalui *P*, sehingga terbentuk lingkaran dengan jari-jari *MP*. Tanda panah ke bawah menyediakan pilihan perintah terkait lingkaran seperti membuat busur dan juring.

g.  Pembuatan dua titik A dan B akan mendefiniskan dua buah titik fokus elips. Selain itu tanda panah ke bawah menyediakan perintah untuk membuat hiperbola, parabola dan konik melalui lima titik.

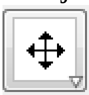
h.  Sudut.
GeoGebra melakukan semua perhitungan sudut dalam radian. Mode ini dapat digunakan untuk membuat sudut antara tiga titik , sudut antara dua ruas garis , dan sudut antara dua vektor. Pilihan lain pada mode ini adalah jarak/panjang garis, luas bangun, dan kemiringan garis.

i.  Refleksi.
Pertama, klik objek yang akan dicerminkan, selanjutnya klik pada garis yang menjadi cerminnya. Perintah lain yang dapat dilakukan pada mode ini adalah rotasi objek, translasi, dan dilatasi.

j. 

Luncuran.
Mode luncuran adalah representasi grafik dari suatu angka atau sudut bebas. Klik pada sembarang tempat kosong pada panel gambar untuk membuat luncuran untuk suatu angka atau sudut. Jendela yang muncul membolehkan anda untuk menentukan nama, interval dari suatu angka atau sudut pada ujung-

ujung luncuran. Perintah lain pada tanda panah memuat perintah sisipkan table atau gambar, kotak centang untuk menampilkan atau menyembunyikan objek, dan menunjukkan relasi dua objek.

k.  Drag/geser.

Klik dan tempatkan panel gambar untuk memindahkan titik awal sistem koordinat. Anda dapat juga memindahkan panel gambar dengan menekan tombol *Shift* dan men-*drag*-nya dengan *mouse*. Pada mode ini anda juga dapat melakukan skalasi pada setiap sumbu dengan men-*drag*-nya dengan *mouse*, perbesar atau perkecil tampilan, dan hapus objek.

Pada GeoGebra, pengguna dapat menulis rumus-rumus atau persamaan matematika. Untuk melakukannya centanglah kotak *Formula LaTeX* pada dialog mode Teks dan masukan formula anda dalam LaTeX *syntax*. Di bawah ini adalah beberapa perintah LaTeX yang sering digunakan.

Formula	Hasil
\frac{a}{b}	$\frac{a}{b}$
\sqrt{x}	$\sqrt{x}$
\sqrt[n]{x}	$\sqrt[n]{x}$
x^{2}	x^2
a_{1}	a_1
\sin\alpha + \cos\beta	$\sin\alpha + \cos\beta$
\int_{a}^{b} x dx	$\int_{a}^{b} x dx$

Penulisan perintah pada bilah masukan harus sesuai dengan perintah yang dikenal dalam geogebra.

Berikut ini akan diberikan beberapa perintah masukan yang sering digunakan. Penulisannya harus benar, karena sedikit saja kesalahan masukan, maka perintah tidak akan dijalankan. Beberapa contoh perintah dalam GeoGebra disajikan dalam tabel berikut.

Operasi	**Masukan**
penambahan	+
pengurangan	-
perkalian	* atau tombol spasi
pembagian	/
pemangkatan	^ atau 2
faktorial	!
fungsi Gamma	gamma( )
kurung	( )
koordinat-x	x( )
koordinat-y	y( )
nilai mutlak	abs( )
akar	sqrt( )
akar pangkat tiga	cbrt( )
fungsi eksponential	exp( ) atau *e*x
logaritma (natural, dari *e*)	ln( ) atau log( )
logaritma dari 2	ld( )
logaritma dari 10	lg( )
kosinus	cos( )
sinus	sin( )
tangen	tan( )
arkus kosinus	acos( )
arkus sinus	asin( )
arkus tangen	atan( )
kosinus hiperbolik	cosh( )
sinus hiperbolik	sinh( )
tangent hiperbolik	tanh( )
arkus kosinus hiperbolik	acosh( )

arkus sinus hiperbolik	asinh( )
arkus tangen hiperbolik	atanh( )
bilangan bulat terbesar lebih kecil atau sama dengan	floor( )
bilangan bulat terkecil lebih besar atau sama dengan	ceil( )

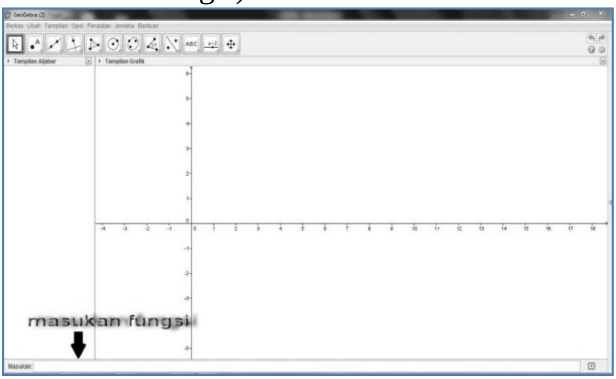
Berikut ini diberikan beberapa contoh dalam pengerjaan dengan geogebra.

1. Menggambar grafik fungsi.

Adapun langkah-langkah menggambar grafik dalam geogebra sebagai berikut.

a. Buka software geogebra

b. Ketika tampilan kosong geogebra telah terbuka, seperti gambar dibawah ini, masukan fungsi yang ingin digambarkan. (lihat tanda panah" masukan fungsi" yang menunjuk kotak "masukan" tempat menuliskan fungsi).



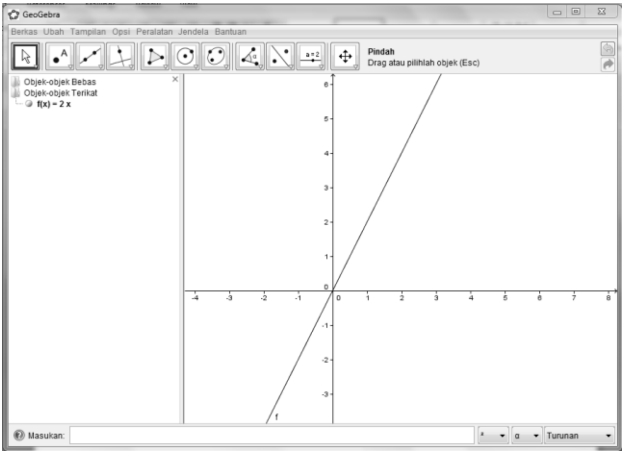
c. Tuliskan fungsi dalam bentuk y sebagai fungsi dari x, misal $y = x^2 + 1$. Maka cara menuliskan di masukan fungsi adalah "y= x^2+1". Setelah menuliskan fungsi pada kotak "masukan", tekan "enter". Maka akan muncul grafik yang diinginkan.

2. Buat sketsa grafik turunan fungsi $f(x) = x^2$.

a. Pertama, buka program geogebra.

b. Pada bilah “masukan” akan ditulis turunan dari x^2 dengan memilih perintah di *drop down*, yaitu “turunan”, kemudian ketik fungsi yang ingin dicari turunannya, yaitu “x^2” di dalam kurung yang tersedia tanpa spasi. Tekan enter, maka akan muncul grafik sebagai berikut.

c.



d. Grafik yang muncul adalah grafik $f(x) = 2x$, karena turunan dari x^2 adalah $2x$.

e. Selain menampilkan grafiknya, geogebra menyediakan hasil dari turunan fungsi itu sendiri.

BAB I
FUNGSI

Sebuah fungsi diibaratkan sebagai sebuah senapan dimana amunisinya dihimpun sebagai daerah asal yang kemudian akan ditembakkan pada himpunan sasaran, setiap peluru akan mengenai titik sasaran tunggal dan dapat pula terjadi beberapa peluru mendarat pada satu titik sasaran yang sama. Ilustrasi tersebut merupakan pengenalan dari definisi fungsi.

A. Fungsi dan Grafik Fungsi

Dalam sistem bilangan real terdapat relasi antara bilangan real itu sendiri. Relasi antara bilangan real dapat dilakukan dengan menentukan suatu aturan tertentu, salah satu aturan tersebut misalnya setiap bilangan real$x$ dikawankan dengan bilagan real yang merupakan dua kali dari x. Aturan relasi yang tidak mengijinkan suatu bilangan x direlasikan ke dua nilai yang berbeda adalah relasi yang akan dibahas pada bab ini yaitu fungsi.

Definisi 1.1.

Suatu relasi disebut fungsi dari himpunan A ke$B$jika untuk setiap $x \in A$ menentukan dengan tunggal kawannya $y \in B$, yang ditulis dengan$f(x)$. Suatu fungsi yang dilambangkan dengan f dari himpunan A ke Bsering juga didefinisikan sebagai himpunan semua pasangan bilangan real berurutan $f = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ sedemikian sehingga apabila(x_1, y_1)dan$(x_2, y_2) \in f$,maka$y_1 = y_2$.

Dari definisi 1.1, x disebut sebagai peubah bebas dan y disebut sebagai peubah tak bebas, dan dikatakan *y* fungsi dari *x*, sedangkan $y = f(x)$disebut aturan dari fungsi *f*. Selanjutnya*A* disebut domain fungsi, *B* disebut kodomain fungsi, dan himpunan$\{y|y = f(x)\}$ disebut range fungsi *f*. Jika $y_0 = f(x_0)$ maka y_0 disebut nilai fungsi *f* di titik $x = x_0$.

Secara umum dapat dikatakan, jika nilai *y* bergantung pada nilai *x* sedemikian hingga setiap nilai *x* menentukan tepat satu nilai *y*, maka dikatakan bahwa "*y* fungsi dari *x*". Domain fungsi seringkali tidak dinyatakan secara eksplisit, maka dalam menentukan domain perlu disesuaikan dengan interpretasi fisis (sesuai keadaan yang memungkinkan). Jika domain fungsi tidak diberikan secara eksplisit, secara umum dianggap bahwa domain fungsi adalah himpunan semua bilangan real.

Contoh 1:

Diberikan E = $\{x: -1 \leq x \leq 3,\ x \in \mathbb{R}\}$ dan fungsi *f* didefinisikan sebagai $f(x) = 2x^2+1$. Tentukan $f(2)$ dan $f(\frac{1}{2})$ serta range fungsi tersebut.

Penyelesaian :

$f(2) = 2.2^2 + 1 = 9$

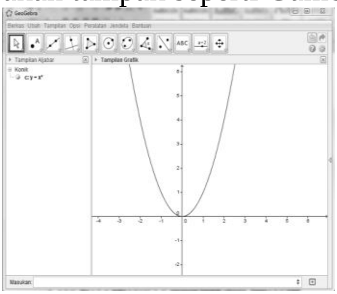
$f(\frac{1}{2}) = 2. \frac{1}{2}^2 + 1 = 1\frac{1}{2}$

Range fungsi *f* dapat dicari dengan mencari nilai maksimum dan minimum fungsi, kemudian menempatkan nilai maksimum dan minimum tersebut sebagai nilai batas dari range fungsi. Sehingga diperoleh range fungsi adalah $\{y| 1 \leq y \leq 19\}$.

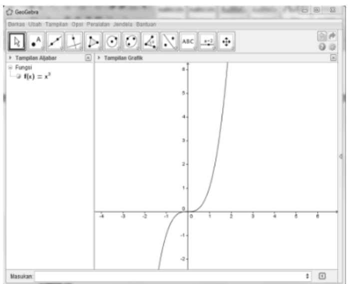
Fungsi yang dibahas disini terbatas pada fungsi bernilai real, maka dari itu suatu fungsi dapat dibayangkan dengan tampilan grafis pada suatu bidang koordinat. Grafik sangat berguna dalam visualisasi perilaku suatu fungsi. Grafik fungsi yang dihasilkan secara manual (menggambar dengan tangan) ataupun dengan media komputer memiliki keterbatasan karena banyaknya bilangan real adalah tak berhingga sehingga tidak semua domain ditampilkan sekaligus. Adapun bantuan media yang digunakan untuk menggambar grafik dalam bahan ajar ini adalah *GeoGebra*.

B. Kesimetrian grafik fungsi

Dalam beberapa kasus, menggambar grafik fungsi dapat dilakukan secara manual tanpa harus menghitung nilai $f(x)$ yang terlalu banyak, tapi dengan mengetahui bentuk grafik fungsi lain yang lebih sederhana dan dengan memanfaatkan sifat kesimetrian grafik. Titik-titik (x, y) dan $(x, -y)$ dikatakan simetris terhadap sumbu*x*, titik-titik (x, y)dan $(-x, y)$ dikatakan simetris terhadap sumbu *y*, sedangkan titik (x, y)dan $(-x, -y)$ dikatakan simetris terhadap titik asal. Jika digambarkan dalam bidang koordinat, maka akan tampak seperti Gambar 01 berikut.



Gambar 1a



Gambar 1b

1a. Grafik simetris terhadap sumbu *y*
1b. Grafik simetris terhadap titik asal

Gambar 01. Kesimetrian Grafik Fungsi

Suatu grafik fungsi dalam bidang koordinat dikatakan simetris jika memenuhi salah satu kondisi berikut:

a. Suatu grafik fungsi simetris terhadap sumbu *y* jika $f(x) = f(-x)$ dan disebut sebagai fungsi genap
b. Suatu grafik fungsi simetris terhadap titik asal jika $f(x) = -f(x)$ dan disebut juga sebagai fungsi ganjil.

Suatu fungsi yang tidak memenuhi salah satu kondisi di atas, maka fungsi tersebut bukan fungsi genap ataupun fungsi ganjil. Dengan memanfaatkan sifat kesimetrisan, maka untuk menggambar grafik fungsi tersebut cukup menghitung titik-titik *x* di salah satu sisi bidang-*xy*, dan titik-titik di sisi yang simetris akan diperoleh secara langsung.

Selain memperhatikan sifat kesimetrisan, bisa juga dengan memperhatikan sifat transformasi grafik. Penambahan atau pengurangan suatu konstanta padavariabelbebas maupun pada fungsi awal akan menggeser letak grafik awal. Maka gambar suatu grafik yang diperoleh dengan menggeser grafik yang lain sebesar konstanta dapat dirangkum pada Tabel 1 sebagai berikut.

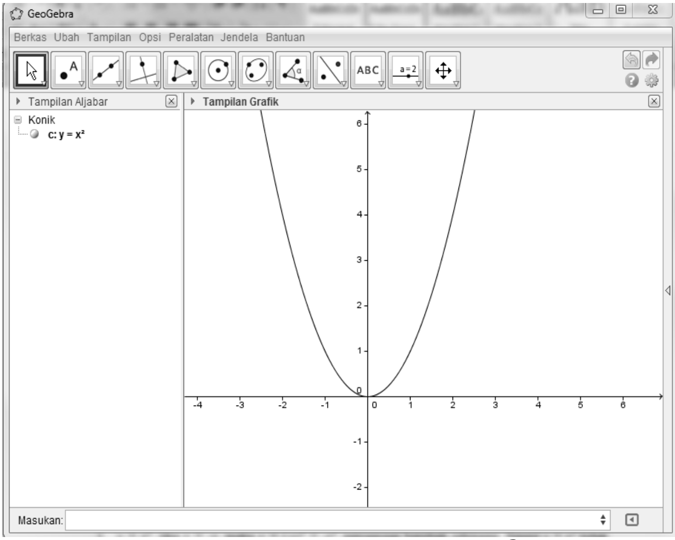
Tabel 1. Transformasi Grafik

Operasi pada $y = f(x)$	Menambahkan konstanta positif c pada $f(x)$	Mengurangkan konstanta positif c dari $f(x)$	Menambahkan konstanta positif c pada x	Mengurangkan konstanta positif c dari x
Persamaan baru	$y = f(x) + c$	$y = f(x) - c$	$y = f(x + c)$	$y = f(x - c)$
Efek geometris	Menggeser grafik $y = f(x)$ ke atas sejauh c satuan	Menggeser grafik $y = f(x)$ ke bawah Sejauh c satuan	Menggeser grafik $y = f(x)$ ke kiri sejauh c satuan	Menggeser grafik $y = f(x)$ ke kanan sejauh c satuan
Contoh	$y = x^2$ menjadi $y = x^2 + 2$	$y = x^2$ menjadi $y = x^2 - 2$	$y = x^2$ menjadi $y = (x + 2)^2$	$y = x^2$ menjadi $y = (x - 2)^2$

Contoh 2.
Gambar grafik $f(x) = x^2$ secara manual.
Penyelesaian :

Sebelum menggambar grafik, perlu diperhatikan sifat kesimetrisan ataupun transformasi yang dapat digunakan untuk membantu. Maka sifat yang pertama diperiksa adalah sifat kesimetrisan dengan mensubstitusi $-x$ sebagai x pada fungsi. Sehingga diperoleh $f(-x) = (-x)^2 = x^2$. Ternyata hasil $f(-x) = f(x)$, hal ini berarti grafik simetris terhadap sumbu y, sehingga untuk memudahkan perhitungan, cukup dihitung nilai fungsi pada nilai x negatif atau positif saja, kemudian mencerminkan sebagian grafik yang telah diperoleh terhadap sumbu y. Selanjutnya dapat dibuat tabel dan grafik seperti berikut (misal nilai x yang diambil adalah x non negatif sebagai perhitungan dalam tabel). Hasil perhitungan dalam table ditampilkan pada Gambar 02.

x	0	0,5	0,8	1	1,2	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	0	0,25	0,64	1	1,44	2,25	4	6,25	9



Gambar 02. Grafik $f(x) = x^2$

Gambar grafik yang ada di kanan sumbu y adalah gambar yang diperoleh dari nilai-nilai yang sesuai tabel, karena grafik simetris terhadap sumbu y, maka dapat digambarkan grafik di kiri sumbu y dengan bentuk dan jarak yang sama seperti grafik di bagian kanan. Sehingga diperoleh grafik $y = x^2$.

C. Operasi pada Fungsi

Operasi pada bilangan juga berlaku dalam fungsi, diantaranya sebagai berikut.

Definisi 1.2.

Jika diberikan fungsi-fungsi $f(x)$dan $g(x)$, maka operasi antara dua fungsi tersebut dapat didefinisikan sebagai berikut:

(i) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

(ii) $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

(iii) $(f.g)(x) = f(x).g(x)$

(iv) $\left({}^{f}\!/_{g}\right)(x) = {}^{f(x)}\!/_{g(x)}, g(x) \neq 0$

Domain fungsi $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$ dan $(f.g)(x)$ adalah irisan dari domain fungsi $f(x)$ dan $g(x)$, sedangkan domain fungsi $\left({}^{f}\!/_{g}\right)(x)$ adalah irisan domain fungsi f dan g kecuali di titik x yang menghasilkan $g(x) = 0$.

D. Komposisi Fungsi

Selain operasi penjumlahan, selisih, perkalian dan pembagian, pada fungsi terdapat juga operasi lain yang disebut komposisi fungsi. Komposisi fungsi $f(x)$ dan $g(x)$, artinya setiap x pada $f(x)$ diganti dengan $g(x)$. Secara umum dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1.3.

Jika diberikan fungsi-fungsi $f(x)$ dan $g(x)$, maka komposisi $f(x)$ dan $g(x)$ ditulis $(fog)(x)$ yang didefinisikan dengan $(fog)(x) = f(g(x))$.

Domain dari $(fog)(x)$ terdiri dari semua x dalam domain g dengan $g(x)$ dalam domain f.

Selain komposisi fungsi, terdapat juga satu operasi fungsi yang merupakan kebalikan dari komposisi, yaitu dekomposisi. Cara umum untuk mendekomposisisikan suatu fungsi, misalkan mendekomposisi $h(x)$ yang merupakan hasil komposisi dua fungsi, maka langkah umum yang dapat dilakukan yaitu:

1. Cermati fungsi $h(x)$ sebagai komposisi dari dua fungsi sehingga dapat ditulis sebagai $h(x) = f(g(x))$.

2. Fungsi $g(x)$ disebut sebagai "fungsi dalam" dan $f(x)$ sebagai "fungsi luar"
3. Komposisikan $f(x)$ dan $g(x)$ untuk mengecek kebenaran $h(x) = f(g(x))$.

Contoh 3.

Nyatakan $h(x) = (x - 4)^5$ sebagai komposisi dua fungsi.

Penyelesaian:

Dengan mencermati fungsi $h(x)$, dapat diperoleh fungsi dalam adalah $g(x) = (x - 4)$ dan fungsi luar adalah saat $g(x)$ dipangkatkan lima, sehingga fungsi luar yang diperoleh adalah $f(x)= x^5$. Sehingga diperoleh $h(x) = f(g(x)) = (g(x))^5 = (x - 4)^5$

Dalam melakukan dekomposisi dapat dilakukan dengan lebih dari satu cara, karena tergantung pada definisi fungsi dalam dan fungsi luarnya.

E. Macam – Macam Fungsi

1. Fungsi Aljabar

Fungsi-fungsi yang termasuk fungsi aljabar adalah fungsi rasional dan irasional. Fungsi rasional meliputi fungsi rasional bulat (fungsi linear, kuadrat, pangkat-n) dan fungsi rasional pecahan. Bentuk umum dari fungsi rasional bulat yang kita kenal adalah :

a. Bentuk umum fungsi linear yaitu$f(x) = mx + c$.
b. Bentuk umum fungsi kuadrat yaitu $f(x)= ax^2+ bx + c$.
c. Bentuk umum fungsi polinom yaitu $f(x)= a_0+ a_1x + a_2x^2+\ldots + a_nx^n$, n bilangan asli.

Berikut akan dibahas satu per satu dari fungsi rasional bulat.

a. Fungsi linear

Fungsi linear ditulis dalam bentuk $f(x) = mx + c$ atau $y = mx + c$**.** Kemiringan garis dan perpotongan grafik dengan sumbu$y$ dapat ditentukan dengan memeriksa fungsi $f(x)$, dimana koefisien x menunjukkan kemiringan garis, dan konstanta c menunjukkan perpotongan grafik pada sumbu y.

Contoh 4:

Suatu fungsi $y = 3x + 7$. Tentukan kemiringan grafik dan perpotongannya dengan sumbu koordinat.

Penyelesaian :

Maka kemiringan garis dari grafik adalah 3 (koefisien dari x), dan akan memotong sumbu$y$ di titik (0,7) karena konstanta $c = 7$. Sedangkan titik potong dengan sumbu x dapat diperoleh dengan membuat $y = 0$, dan diperoleh $x = -7/3$ (di titik $(-7/3\,, 0)$).

Definisi 1.4.

Jika P(x_1,y_1) dan Q(x_2,y_2) titik-titik pada bidang koordinat, maka kemiringan m pada garis tersebut didefinisikan dengan:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Definisi 1.4 tidak diterapkan pada garis tegak, karena akan menghasilkan pembagian dengan nol. Sehingga kemiringan garis tegak tidak didefinisikan.

Contoh 5:

Tentukan kemiringan garis yang melalui titik (6,2) dan titik (9,8).

Penyelesaian:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-2}{9-6} = \frac{6}{3} = 2$$

Sekarang akan dibahas mengenai bagaimana menentukan aturan fungsi linear yang melalui suatu titik dengan kemiringan tertentu. Misalkan suatu garis g melalui titik P(x,y)dan Q(x_1,y_1),maka diperoleh, $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$ yang dapat ditulis ulang sebagai

$y - y_1 = m(x - x_1)$.

Persamaan $y - y_1 = m(x - x_1)$ merupakan aturan suatu fungsi linear yang melalui titik (x_1,y_1) dengan kemiringan m.

Contoh 6:

Tentukan persamaan garis melalui titik (4, - 3) dengan kemiringan 5.

Penyelesaian:

Aturan yang digunakan adalah $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Maka dapat disubstitusi nilai $x_1 = 4$, $y_1 = -3$, dan $m = 5$ ke persamaan , sehingga diperoleh:

$$y - (-3) = 5(x - 4) \Leftrightarrow y + 3 = 5x - 20 \Leftrightarrow y = 5x - 23$$

Berdasarkan persamaan garis yang diperoleh dengan mensubstitusi nilai m dan satu titik koordinat, maka dapat dirumuskan aturan fungsi linear yang diketahui melalui dua titik tertentu sebagai berikut:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

b. Fungsi Kuadrat

Fungsi kuadrat ditulis dalam bentuk $y = f(x) = ax^2 + bx + c$. Bentuk fungsi kuadrat adalah parabola, dimana nilai *a*,*b* dan *c* akan menentukan bentuk grafik fungsi kuadrat.

Berdasarkan bentuk grafik fungsi kuadrat, maka untuk memudahkan menggambarkan bentuk suatu fungsi kuadrat perlu dicari titik puncak grafik (titik belok), titik potong dengan sumbu*x* atau sumbu*y*, serta menghitung nilai fungsi di beberapa titik lain jika diperlukan. Misalnya titik puncak grafik adalah di (x,y), maka dalam menentukan titik puncak (x,y) dirumuskan sebagai berikut :

$x = -\dfrac{b}{2a}$, $y = -\dfrac{D}{4a}$, dengan D adalah diskriminan dimana $D = b^2 - 4ac$. Nilai *y* juga dapat diperoleh dengan mengganti nilai $x = -\dfrac{b}{2a}$ pada fungsi kuadrat.

Kemudian untuk menentukan titik potong terhadap sumbu *y* dengan menetapkan $x = 0$, sehingga diperoleh nilai $y = c$. Jadi koordinat titik potong terhadap sumbu *y* adalah $(0,c)$. Sedangkan titik potong terhadap sumbu *x* dapat dicari dengan menetapkan $y = 0$, kemudian menyelesaikan persamaan untuk memperoleh nilai *x*.

Contoh 7:

Gambarkan grafik fungsi $y = x^2 - 3x + 2$.

Grafik fungsi yang digambarkan adalah fungsi kuadrat, maka pertama akan ditentukan titik puncak dari fungsi, yaitu menghitung nilai *x* dan *y* sebagai koordinat titik puncak.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-3)}{2.1} = \frac{3}{2}, \qquad y = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3.\frac{3}{2} + 2 = -\frac{1}{4},$$

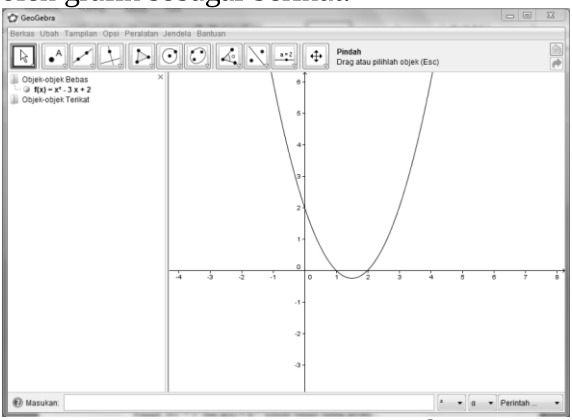
maka koordinat titik puncak grafik adalah $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

Titik potong grafik terhadap sumbu y adalah saat $x = 0$, maka diperoleh :

$y = 0^2 - 3.0 + 2 = 2$, maka titik potong grafik terhadap sumbu y adalah (0,2).

Titik potong grafik terhadap sumbu x adalah saat $y = 0$, sehingga diperoleh: $0 = x^2 - 3x + 2$. Dengan menyelesaikan persamaan tersebut akan diperoleh, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$. Sehingga titik potong grafik terhadap sumbu x adalah (2,0) dan (1,0).

Berdasarkan perhitungan tersebut, telah diperoleh empat titik untuk menggambar grafik. Untuk melengkapi grafik, dapat diambil beberapa titik, dengan mengambil nilai $x > 2$ dan $x < 0$. Sehingga diperoleh grafik sebagai berikut.



Gambar 03. Grafik fungsi $y = x^2 - 3x + 2$

c. Invers Fungsi

Definisi 1.5.

Suatu fungsi f dikatakan fungsi satu – satu jika memenuhi $f(x_1) \neq f(x_2)$ jika $x_1 \neq x_2$.Misalkan f fungsi satu – satu dengan domain A dan range B, maka invers fungsi f^{-1} mempunyai domain B dan range A didefinisikan oleh,$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$, untuk beberapa y di B.

Invers suatu fungsi adalah tunggal, dimana invers dari suatu fungsi $f(x)$ dinotasikan dengan $f^{-1}(x)$, dengan catatan $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$. Domain dan range invers fungsi dapat dituliskan dalam hubungan sebagai berikut:

- Range dari f^{-1} = domain dari f
- Domain dari f^{-1} = range dari f

Jika fungsi – fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ memenuhi dua kondisi:

- $f(g(x)) = x$ untuk setiap x dalam domain g
- $g(f(x)) = x$ untuk setiap x dalam domain f

Maka dapat dikatakan bahwa $f(x)$ invers dari $g(x)$ dan $g(x)$ invers dari $f(x)$ atau secara singkat dikatakan bahwa $f(x)$ dan $g(x)$ merupakan fungsi yang saling invers.

Contoh 8:

Fungsi $f(x) = x^5$ dan $g(x) = x^{1/5}$ adalah fungsi saling invers.

Penyelesaian :

$$f(g(x)) = (g(x))^5 = (x^{1/5})^5 = x$$

$$g(f(x)) = (f(x))^{1/5} = (x^5)^{1/5} = x$$

Perhitungan diatas menunjukkan bahwa $f(g(x)) = g(f(x))$, maka $f(x)$ dan $g(x)$ saling invers.

Cara mendapatkan invers suatu fungsi satu – satu berkaitan dengan penyelesaian persamaan$y = f(x)$ menjadi $x = f(y)$

Definisi 1.6.

Jika fungsi f mempunyai invers, maka dapat dikatakan bahwa $y = f(x)$ dapat diselesaikan sebagai $x = f(y)$.

Merumuskan f^{-1} dapat diselesaikan secara aljabar, dimana f cukup sederhana (dapat diselesaikan). Hasil yang diperoleh akan menunjukkan bahwa y sebagai peubah bebas.Untuk menyatakan x sebagai peubah bebas dapat dilakukan pembalikan peran x dan y. Maka prosedur untuk mendapatkan f^{-1} dapat dirangkum sebagai berikut:

1). Tukarkan x dan y dalam persamaan $y = f(x)$ untuk menghasilkan $x = f(y)$.

2). Selesaikan persamaan $x = f(y)$ dengan melakukan pembalikan peran x dan y, sehingga akan diperoleh persamaan terakhir sebagai $f^{-1}(x)$.

Contoh 9:

Tentukan invers fungsi dari $f(x) = x^3$, dan gambarkan grafik $f(x)$ beserta grafik invers fungsinya.

Penyelesaian :

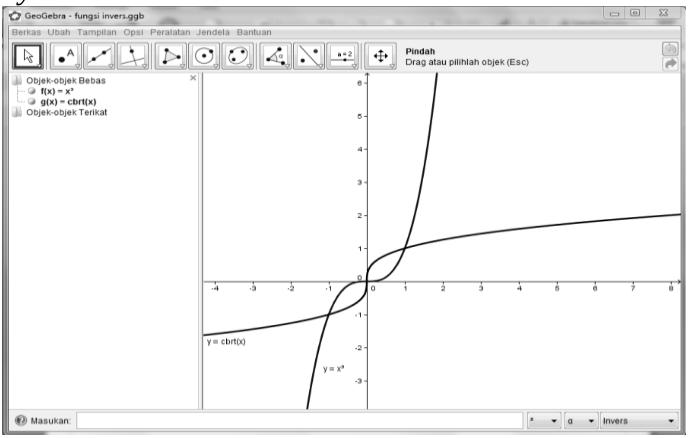
Sesuai dengan prosedur dalam mendapatkan invers, pertama harus diubah bentuk $y = f(x)$ menjadi $x = f(y)$.

$$y = x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

Hasil yang diperoleh untuk $x = f(y)$ dilakukan pembalikan peran x dan y, sehingga diperoleh $f^{-1}(x)$ sebagai hasil akhir.

Bentuk grafik $f(x)$ dan $f^{-1}(x)$ disajikan dalam gambar 04. Dari grafik yang ditampilkan, terlihat bahwa grafik $f(x)$ dan $f^{-1}(x)$ memiliki bentuk yang sama tapi dengan arah yang berlawanan, dimana $f^{-1}(x)$ adalah hasil pencerminan $f(x)$ terhadap garis $x = y$.

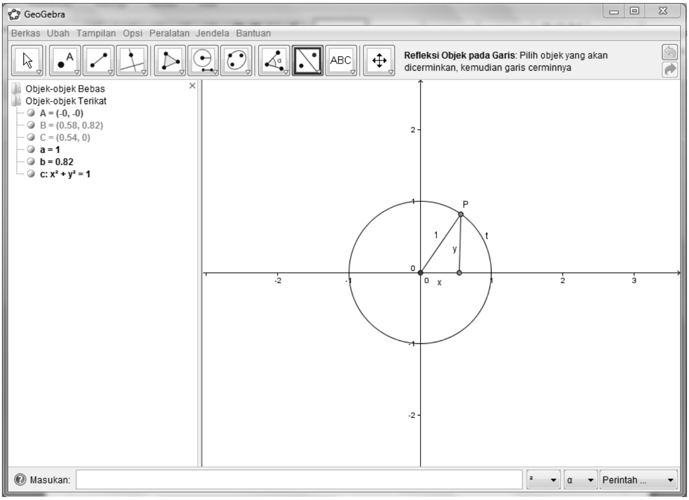


Gambar 04. Grafik $f(x) = x^3$ dan $g(x) = \sqrt[3]{x}$

Invers suatu fungsi belum tentu merupakan sebuah fungsi. Syarat suatu invers fungsi disebut sebagai fungsi invers, jika f adalah suatu fungsi yang bijektif (korespondensi satu – satu).

2. Fungsi Trigonometri

Fungsi trigonometri yang dibahas akan didasarkan pada lingkaran satuan yang digambarkan seperti gambar dibawah ini.



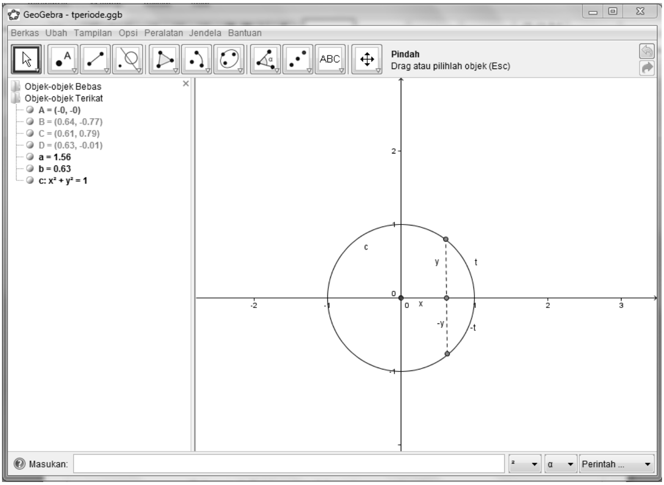
Gambar 05. Lingkaran Satuan

Perhatikan gambar lingkaran berjari-jari satu di atas. Posisi titik $P = (x, y)$ membentuk sudut t positif dengan sumbu x, dihitung berdasarkan arah yang berlawanan jarum jam dengan satuan radian. $1^0 = \frac{\pi}{180}$ rad dan 1 rad = $\frac{180^0}{\pi}$, dimana π = 3,1415.

Definisi 1.7

$y = \sin t$,

$x = \cos t$.



Gambar 06. Periode Fungsi Trigonometri

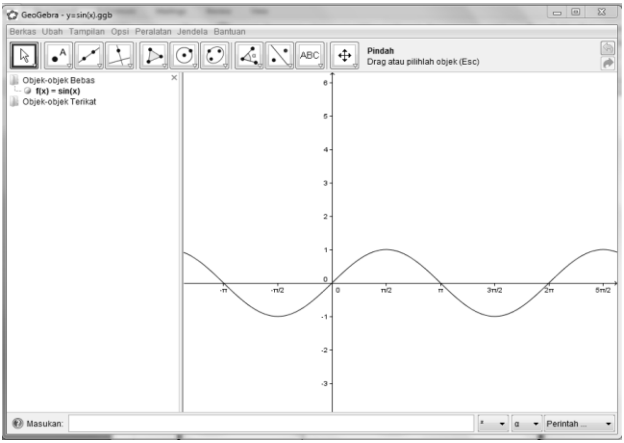
Gambar 06 menunjukkan sudut $t + 2\pi$ dan t menentukan posisi titik P yang sama, sehingga, sin $(t + 2\pi)$ = sin t dan $\cos(t + 2\pi) = \cos t$. Dikatakan fungsi tersebut periodik dengan periode 2π. Secara umum, suatu fungsi f dikatakan periodik, jika terdapat suatu bilangan positif p sedemikian sehingga $f(t + p)= f(t)$ untuk semua t dalam daerah asal f. Sehingga dapat dikatakan fungsi sin t periodik dengan periode 2π, maka diperoleh $\sin(-t) = -\sin t$, dan $\cos(-t) = \cos t$.

Beberapa definisi penting dalam trigonometri, yaitu:

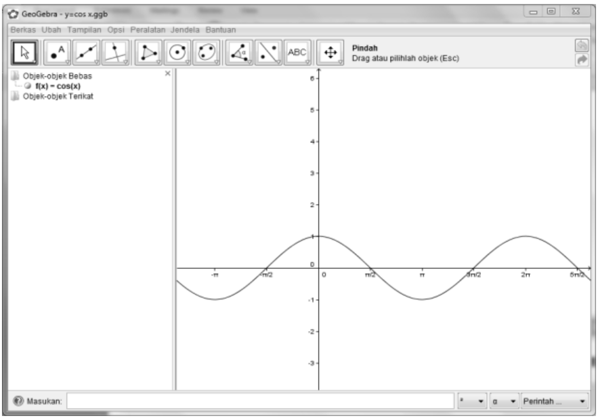
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

Karena $\sin t = x$, $\cos t = y$, dan dalam lingkaran satuan berlaku $x^2 + y^2 = 1$, maka berlaku, $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.

Beberapa grafik fungsi trigonometri digambarkan seperti dibawah ini.



Gambar 07. Grafik $y = \sin x$



Gambar 08. Grafik $y = \cos x$

Pada gambar $y = \sin x$ dan $y = \cos x$, terlihat bahwa fungsi ini simetris terhadap sumbu y, dan bentuk yang berulang pada selang tertentu menunjukkan bahwa fungsi ini periodik. Nilai sin dan cos berkisar dari -1 sampai 1 ($-1 \leq \sin x \leq 1$ dan $-1 \leq \cos x \leq 1$).

BAB II
LIMIT FUNGSI

A. Definisi Limit Fungsi

Kata limit secara awam sering berarti batas. Tapi limit dalam matematika digunakan untuk menggambarkan perilaku fungsi jika peubah bebasnya bergerak menuju suatu nilai tertentu. Berikut ini akan diberikan definisi limit dalam matematika.

Definisi 2.1

Limit *f*(*x*) saat *x* mendekati *a* sama dengan *L*, ditulis: $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Definisi 2.1 menyatakan, jika *x* mendekati *a*, tetapi $x \neq a$, maka *f*(*x*) mendekati *L*. Hal ini berarti, *f*(*x*) tidak perlu terdefinisi di *x* = *a*, tapi definisi limit menjelaskan nilai *f*(*x*) saat *x* sangat dekat dengan *a*.

Contoh 10:

Tentukan $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$.

Penyelesaian :

Perhatikan fungsi *f(x)* = $\frac{x-1}{x^2-1}$ tidak terdefinisi di *x* =1, karena menyebabkan nilai penyebut sama dengan nol saat *x* = 1. Maka yang dihitung adalah nilai fungsi saat *x* sangat dekat dengan 1. Untuk menentukan nilai limit tersebut, dekati *x* =1 dari kiri (saat *x* < 1) dan dari kanan (saat *x* > 1), hasil *f*(*x*) disajikan dalam Tabel 2 berikut.

Tabel 2. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$

x	0,5	0,9	0,99	0,999	1,001	1,01	1,1	1,5
$f(x)$	0,6667	0,5263	0,5025	0,5003	0,4998	0,4975	0,4762	0,4

Berdasarkan nilai $f(x)$ yang ditunjukkan dalam tabel 2, dapat diamati bahwa saat x semakin mendekati 1, nilai $f(x)$ semakin dekat dengan 0,5. Baik didekati dari kiri maupun dari kanan. Hal ini berarti saat x mendekati 1, maka nilai $f(x)$ mendekati 0,5. Sehingga dapat disimpulkan limit $f(x)$ saat x mendekati 1 sama dengan 0,5, atau dapat ditulis: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=0{,}5$.

B. Limit Sepihak

Berdasarkan cara penentuan nilai limit fungsi pada contoh 10, limit $f(x)$ dihitung dengan mendekati x dari kiri dan dari kanan, dimana keduanya menghasilkan nilai yang sama, sehingga diperoleh kesimpulan untuk nilai limit fungsi itu sendiri. Itu berarti suatu limit fungsi dapat ditentukan saat limit kiri dan limit kanan menghasilkan nilai yang sama. Sehingga dapat dirangkum dalam definisi berikut.

Definisi 2.2.

a. Limit kiri $f(x)$ saat x mendekati a atau limit $f(x)$ saat x mendekati a dari kiri sama dengan L. Maka dapat ditulis: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$.

Definisi 2.2a berarti, $f(x)$ mendekati L saat x mendekati a dan $x<a$.

b. Limit kanan $f(x)$ saat x mendekati a atau limit $f(x)$ saat x mendekati a dari kanan sama dengan L. Maka dapat ditulis: $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$.

Definisi 2.2b berarti, $f(x)$ mendekati L saat x mendekati a dan $x > a$.

Berdasarkan definisi 2.1 dan 2.2, maka dapat dituliskan hubungan keduanya, yaitu:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L, \text{ jika dan hanya jika } \lim_{x \to a^-} f(x) = L \text{ dan } \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Contoh 11:

Suatu fungsi f didefinisikan oleh,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{jika } x < 0 \\ 0, & \text{jika } x = 0 \\ 1, & \text{jika } x > 0 \end{cases}$$

Tentukan $\lim_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim_{x \to 0^-} f(x)$, dan $\lim_{x \to 0} f(x)$!

Penyelesaian:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1, \quad \text{dan} \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

Karena limit kiri dan limit kanan tidak sama, maka tidak dapat ditentukan nilai limit $f(x)$ saat x mendekati 0. Hal ini berarti $\lim_{x \to 0} f(x)$ tidak ada.

Secara umum, suatu fungsi $f(x)$ tidak selalu memiliki nilai limit untuk $x \to a^-$, $x \to a^+$ atau saat $x \to a$. Jika suatu fungsi $f(x)$ tidak memiliki nilai limit saat x mendekati a, maka dikatakan limit $f(x)$ tidak ada saat x mendekati a. Terdapat dua penyebab limit dikatakan tidak ada, yaitu: osilasi dan fungsi naik atau turun tak terbatas.

C. Limit Tak Hingga

Jika nilai suatu fungsi $f(x)$ semakin bertambah atau berkurang (bergerak tak terbatas) saat x mendekati a, maka dikatakan nilai limit $f(x)$ tak berhingga saat x mendekati a. Jika x naik tanpa batas, maka ditulis $x \to +\infty$ dan jika x turun tanpa batas, maka ditulis $x \to -\infty$.

Sehingga dapat ditulis dalam definisi 2.3 berikut.

Definisi 2.3.

Jika $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ suatu fungsi terdefinisi di kedua sisi dari a, tapi $f(x)$ tidak terdefinisi di a, maka

Ini berarti nilai $f(x)$ semakin bertambah saat x semakin mendekati a.

Jika $f(x)$ $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ semakin bertambah negatif saat x semakin mendekati a, maka

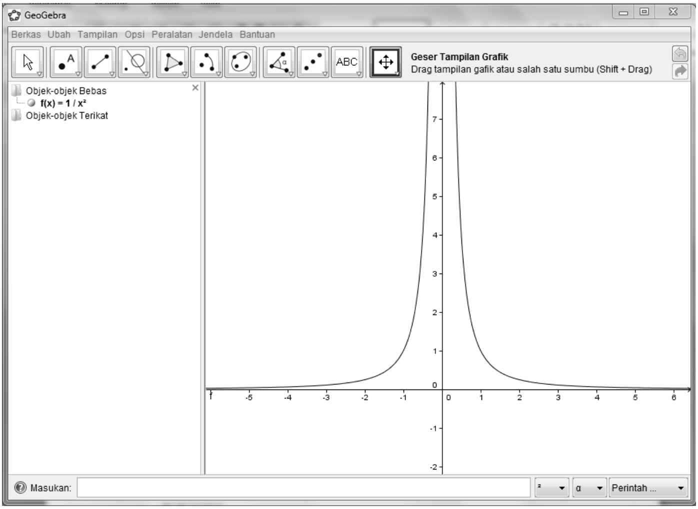
Jika $f(x)$ $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ semakin bertambah positif saat x semakin mendekati a, maka

Contoh 12 :

Tentukan $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$

Penyelesaian:

Nilai fungsi saat $x = 0$ adalah tidak terdefinisi. Untuk menentukan nilai fungsi saat x mendekati nol, perhatikan gambar 09 di bawah ini.



Gambar 09. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Berdasarkan gambar 09, dapat diamati bahwa nilai *f*(*x*) semakin bertambah positif saat *x* mendekati nol, baik dari sisi kiri maupun dari sisi kanan. Hal ini berarti nilai limit *f*(*x*) adalah tak hingga. Sehingga dapat ditulis:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty, \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty, \quad \text{maka } \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Definisi 2.4.

Suatu fungsi yang terdefinisi pada selang (a, ∞), maka $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$

Suatu fungsi yang terdefinisi pada selang (- ∞, a), maka $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$

Contoh 13:

Tentukan $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2}$

Penyelesaian:

Perhatikan fungsi $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, domain $f(x)$ adalah $(-\infty,0)$ $(0,\infty)$, dan pada saat nilai x sangat besar, maka $f(x)$ menjadi sangat kecil mendekati nol. Maka dapat disimpulkan:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Contoh 14:

Tentukan

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 + x + 3}$$

Penyelesaian:

Pada saat nilai x sangat besar, maka nilai pembilang dan penyebut juga semakin besar, sehingga tidak dapat ditentukan nilai limit $f(x)$ saat $x \to \infty$. Sehingga diperlukan bantuan aljabar dengan membagi setiap suku dengan x yang berderajat tertinggi, yaitu x^2. Sehingga akan diperoleh sebagai berikut.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 + x + 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{3}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{1 - 0 + 0}{2 + 0 + 0} = \frac{1}{2}$$

Berdasarkan contoh di atas, secara umum diperoleh aturan limit fungsi di tak hingga untuk fungsi rasional.

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots b_n x^0},\ p(x) \neq 0$$

Maka:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0}{b_0}.$$

D. Aturan Limit Fungsi

Dalam menghitung nilai limit, terdapat beberapa aturan yang memudahkan kita untuk menghitung limit fungsi. Adapun aturan – aturan tersebut adalah sebagai berikut.

$\lim_{x \to a} f(x)$ dan $\lim_{x \to a} g(x)$

Jika c adalah suatu konstanta serta ada, maka berlaku:

1. $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$
2. $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$
3. $\lim_{x \to a} cf(x) = c \lim_{x \to a} f(x)$
4. $\lim_{x \to a} [f(x) . g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) . \lim_{x \to a} g(x)$
5. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, *jika* $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$
6. $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n$
   dimana n bilangan bulat positif.
7. $\lim_{x \to a} c = c$
8. $\lim_{x \to a} x = a$
9. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$, dimana n bilangan bulat positif.
10. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$, dimana n bilangan bulat positif dan jika n genap, diasumsikan a > 0.
11. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$, dimana n bilangan bulat positif dan jika n genap, diasumsikan $\lim_{x \to a} f(x) > 0$.

Contoh 15:

Tentukan nilai $\lim\limits_{x\to 2} 2x^2 - 4x + 1$

Penyelesaian :

Dengan memanfatkan aturan limit, maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} 2x^2 - 4x + 1 &= \lim_{x\to 2} 2x^2 - \lim_{x\to 2} 4x + \lim_{x\to 2} 1 \\
&= 2\lim_{x\to 2} x^2 - 4\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 1 \\
&= 2\left(\lim_{x\to 2} x\right)^2 - 4\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 1 \\
&= 2(2)^2 - 4(2) + 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Berdasarkan hasil pada contoh 15, jika dibandingkan saat x = 2 disubstitusi secara langsung pada fungsi $f(x)$, maka diperoleh $f(2)$ = 2.12 – 4.1 + 1 = 1. Ini berarti nilai $f(x)$ saat x mendekati 2 sama dengan nilai $f(x)$ saat x = 2. Sehingga diperoleh aturan substitusi langsung untuk mencari nilai limit.

Bila f adalah fungsi polinom atau fungsi rasional dan a adalah domain f,

maka $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Aturan substitusi langsung tidak berlaku untuk semua fungsi rasional. Perhatikan contoh berikut.

Contoh 16:

Tentukan $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Penyelesaian :

Substitusi langsung nilai x = 2 pada $f(x)$ akan menghasilkan penyebut yang sama dengan nol, sehingga tidak bisa dilakukan substitusi langsung. Jika menggunakan aturan limit yaitu aturan pembagian, juga menghasilkan limit pada penyebutnya sama dengan nol. Maka cara lain yang dapat dilakukan adalah dengan manipulasi aljabar, yaitu pemfaktoran. Sehingga akan diperoleh sebagai berikut.

$$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$

Maka selanjutnya dapat ditulis

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}x+2=2+2=4$$

Satu hal penting yang digarisbawahi, yaitu

$$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}\neq x+2.$$

Berdasarkan contoh 16, secara umum dapat disimpulkan, jika $f(x) = g(x)$, saat $x \neq a$, maka

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x).$$

The Sqeeze Theorem **(Teorema Apit)**

Jika $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, saat x mendekati a dan $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}h(x)=L$, maka $\lim_{x\to a}g(x)=L$.

Teorema apit juga sering disebut dengan Teorema Sandwich.

Definisi $f(x) \leq g(x)$ berarti, nilai $f(x) \leq g(x)$ di setiap $x \in \mathbb{R}$.

E. Kontinuitas

Pada pembahasan sebelumnya tentang limit telah dijelaskan, bahwa suatu limit fungsi $f(x)$ saat x mendekati a dapat dihitung dengan menentukan nilai fungsi saat $x=a$ atau menghitung $f(a)$. Fungsi inilah yang disebut sebagai fungsi yang kontinu di a.

Definisi 2.5.

Suatu fungsi f dikatakan kontinu di a jika. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Berdasarkan definisi 2.5, mengakibatkan ada tiga kondisi yang harus dipenuhi oleh suatu fungsi f yang kontinu di a, yaitu :

a. Fugsi f terdefinisi di a

b. $\lim_{x \to a} f(x) \quad ada$

c. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Jika salah satu atau lebih kondisi diatas tidak dipenuhi di a, maka dikatakan fungsi f tidak kontinu di a, atau dikatakan f diskontinu di a.

Contoh 18:

Tentukan dimana fungsi berikut diskontinu.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, \text{ jika } x \neq 2 \\ 1, \qquad jika\ x = 2 \end{cases}$$

Penyelesaian:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x+2) = 4$$

,

dan dari definisi diketahui $f(2) = 1$.

Karena $\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$, f diskontinu di $x = 2$.

Definisi 2.6.

Suatu fungsi f dikatakan kontinu kanan di a jika $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ dan f kontinu kiri di a jika $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

Definisi 2.7.

Suatu fungsi f dikatakan kontinu pada selang jika f kontinu di setiap titik dalam selang. Jika f terdefinisi hanya di salah satu ujung selang, maka dikatakan f kontinu kanan atau kontinu kiri.

Suatu fungsi polinom, fungsi rasional, fungsi akar dan fungsi trigonometri adalah fungsi yang kontinu disetiap domainnya.

Contoh 19:

Tentukan dimana fungsi berikut diskontinu, kontinu kanan dan kontinu kiri.

$$f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & \text{jika } x \le 0 \\ 2-x, & \text{jika } 0 < x \le 2 \\ (x-2)^2, & \text{jika } x > 2 \end{cases}$$

Penyelesaian:

a. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 1 + x^2 = 1 = f(0)$

b. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 2 - x = 2 \ne f(0)$

c. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 2 - x = 0 = f(2)$

d. $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x-2)^2 = 0 = f(2)$

Berdasarkan penjabaran pada poin a,b,c dan d, maka dapat disimpulkan bahwa $f(x)$ diskontinu di $x = 0$, kontinu kanan di $x = 2$, sedangkan $f(x)$ kontinu kiri di $x = 0$ dan $x = 2$.

F. Limit Fungsi Trigonometri

Pembahasan paling mendasar dalam limit fungsi trigonometri adalah limit sin *x* dan cos *x* saat *x* mendekati nol, dimana *x* adalah sudut dalam radian.

Ada dua limit dasar dalam aturan limit fungsi trigonometri, yaitu:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ dan } \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{h} = 0$$

(pembuktian diberikan pada bagian pembahasan LKM limit fungsi trigonometri).

Aturan limit fungsi trigonometri lainnya dapat ditentukan dari aturan dasar tersebut dengan memanfaatkan aturan – aturan limit sebelumnya.

BAB III
TURUNAN

A. Definisi Turunan Fungsi

1. Kemiringan Garis Singgung

Kemiringan garis suatu grafik fungsi linear $y = f(x)$ dapat ditentukan dengan formula yang telah dikenal pada saat materi fungsi, dimana saat suatu garis melalui dua titik yaitu $(x,f(x))$ dan $(a,f(a))$, maka kemiringannya dapat ditentukan dengan : .

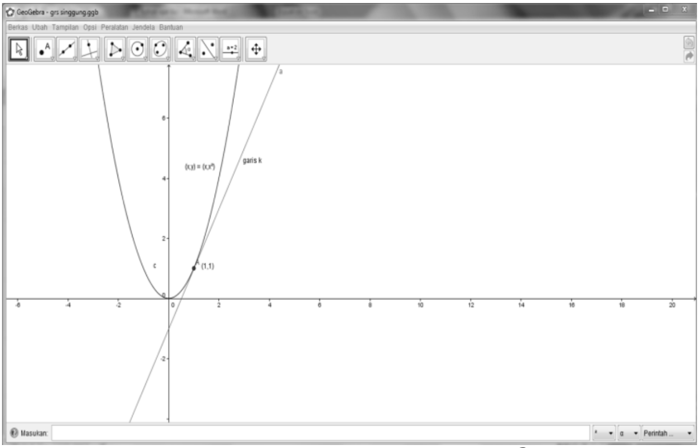
Tapi pada saat diketahui grafik fungsi linear memotong grafik lain di satu titik, dengan kata lain menyinggung suatu grafik di satu titik, misalkan di titik $(a,f(a))$, maka tidak cukup menggunakan formula tersebut karena hanya diketahui satu titik. Sehingga diperlukan bantuan titik lain di suatu $x \neq a$, sehingga persamaan sebelumnya dapat dipandang sebagai suatu proses limit terhadap kemiringan garis singgung di titik $(a, f(a))$, sehingga diperoleh:

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad .$$

Pada saat $x = a$, maka kemiringannya tidak terdefinisi. Maka dimisalkan $x - a = h$, sehingga diperoleh $x = a + h$, sehingga kemiringan garis singgung suatu kurva dapat ditulis :

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Berikut diberikan tampilan grafis suatu grafik $y = x^2$ yang disinggung oleh garis k di titik (1, 1).



Gambar 10. Garis singgung grafik $y = x^2$ di titik (1, 1)

Contoh 20:

Dapatkan kemiringan dan persamaan garis singgung pada grafik $f(x) = x^2$ di titik $P(3,9)$.

Penyelesaian :

Diketahui : $\mathrm{a} = 3$ dan$\mathrm{f(a)} = 9$

$$m_s = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(9+6h+h^2\right)-9}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6h+h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f\left(9+6h+h^2\right)-9}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 6+h = 6$$

Sedangkan persamaan garis singgungnya diperoleh dengan formula yang telah digunakan pada bab sebelumnya, yaitu mencari persamaan garis lurus melalui satu titik dimana kemiringannya telah diketahui, yaitu: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Maka diperoleh persamaan garis singgung untuk contoh 20:

$y - 9 = 6(x - 3)$

$y = 6x - 9$

2. Kecepatan sesaat

Kecepatan sesaat yang dimaksud disini adalah kecepatan setelah *t* detik terhadap fungsi jarak.

Contoh 21:

Misalkan fungsi $s(t) = 25^2 + 10t$ menyatakan jarak (satuan km) yang ditempuh bus setelah t jam selama selang waktu $0 \leq t \leq 2$. Dalam hal ini kecepatan rata – rata bus selama perjalanan adalah :

$$\bar{v}_{[0,2]} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(2)-s(0)}{2-0} = \frac{120-0}{2} = 60\,\frac{km}{jam}$$

Sekarang amatilah kecepatan rata – rata bus dalam selang waktu $a \leq t \leq b$ yang tercantum pada tabel berikut.

Tabel 3. Kecepatan rata - rata

Δt	0 – 1	0.5 – 1	0.8 – 1	0.9 – 1	0.99 - 1	0.999-1	0.9999-1
v	35	47.5	55	57.5	59.75	59.975	59.9975
Δt	1 – 1.0001	1- 1.001	1 - 1.01	1 - 1.1	1 – 1.2	1-1.5	1 – 2
V	60.0025	60.025	60.25	62.5	65	72.5	85

Jika b dibiarkan konstan sama dengan 1, dan *a* digerakkan mendekati 1 (dari arah kiri), ternyata kecepatannya menuju kesatu nilai tertentu, yaitu 60. Dengan kata lain, jika lebar selang waktunya dibuat menjadi semakin kecil mendekati 0, baik dari arah kiri maupun dari arah kanan nilai *t* = 1, maka kecepatannya mendekati 60. Nilai ini disebut kecepatan sesaat pada *t* = 1, atau kecepatan setelah *t* = 1.

Dengan demikian kecepatan sesaat diperoleh melalui proses limit terhadap kecepatan rata – rata, dengan cara membuat t menuju 1 atau Δt menuju 0, yang ditulis sebagai berikut :

$$\lim_{t\to 1}\frac{s(t)-s(1)}{t-1}=\lim_{t\to 1}\frac{25t^2-10t-35}{t-1}=5\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(5t+7)}{t-1}=$$
$$5\lim_{t\to 1}(5t+7)=60$$

Formula yang diperoleh untuk menentukan kemiringan garis, serupa dengan formula menentukan kecepatan sesaat, sehingga secara umum diberikan suatu nama yaitu turunan suatu fungsi.

Definisi 3.1.

Turunan suatu fungsi *f* di *a* dinotasikan dengan *f*'(*a*) yang didefinisikan oleh:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Dengan catatan , jika limit ini ada.

Berdasarkan definisi 3.1, maka untuk menentukan kemiringa garis suatu kurva atau menentukan kecepatan sesaat setelah *t* detik sama artinya mencari turunan fungsinya.

B. Notasi turunan

Keragaman notasi turunan masing – masing memiliki tujuan sendiri dan semua dapat digunakan, sehingga penting sekali untuk mengenal semuanya. Proses mendapatkan turunan disebut diferensiasi. Untuk memudahkan memahaminya, dapat dibayangkan diferensiasi sebagai suatu operasi yang apabila diterapkan pada suatu fungsi *f* menghasilkan f'. Bila dinyatakan sebagai $y = f(x)$, berarti *x* peubah bebasnya dan *y* peubah terikat, maka operasi diferensiasi dinotasikan sebagai berikut.

$$f'(x)=y'=\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)=Df(x)=D_x f(x)$$

Jika peubah bebasnya bukan x, maka penulisannya disesuaikan dengan peubahnya. Misalkan $y = f(u)$, maka turunan fungsi $y = f(u)$ dapat ditulis:

$$y' = \frac{dy}{du} \text{ atau } f'(u) = \frac{df}{du} = \frac{d}{du} f(u).$$

Notasi $\frac{dy}{dx}$ diperkenalkan oleh Leibniz yang sama artinya dengan $f'(x)$ dan notasi ini merupakan notasi umum yang sering digunakan dalam menyatakan turunan.

Definisi 3.2.

Suatu fungsi f dapat diturunkan di x jika $f'(x)$ ada. Fungsi f dapat diturunkan di selang terbuka (a,b) atau di (a, ∞) atau di $(-\infty,a)$ atau di $(-\infty,\infty)$, jika f dapat diturunkan di setiap bilangan dalam interval tersebut.

Apabila f tidak dapat diturunkan di suatu titik, maka dikatakan bahwa turunan f tidak ada di titik tersebut. Klasifikasi titik – titik dimana fungsi f tidak dapat diturunkan adalah titik yang memuat sudut tajam, titik yang memuat garis singgung tegak, atau titik – titik diskontinuitas.

C. Hubungan antara dapat diturunkan dan kontinuitas

Teorema utama berikut ini menunjukkan hubungan antara diferensiabilitas dan kontinuitas suatu fungsi.

Teorema 3.1: Jika f dapat diturunkan di titik a, maka f juga kontinu di a.

Bukti :

Akan ditunjukkan bahwa jika $f(x_0)$ ada, maka $\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) - f(x_0)$$
$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h\right]$$
$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h\right]\cdot \lim_{h\to 0} h$$
$$= f'(x_0)\cdot 0 = 0$$
Terbukti $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$.

Beberapa hal penting dari Teorema 3.1 adalah:

a) Di titik – titik dimana fungsi *f* diskontinu maka fungsi *f* tidak dapat diturunkan di titik-titik tersebut.

b) Suatu fungsi yang dapat diturunkan di suatu titik mengakibatkan kontinuitas di titik tersebut.

c) Suatu fungsi *f* yang kontinu disuatu titik belum tentu mempunyai turunan.

Contoh 22:

Fungsi $f(x) = |x|$ adalah kontinu untuk semua *x* dan akibatnya kontinu di $x = 0$. Tunjukkan bahwa $f(x) = |x|$ tidak dapat diturunkan di *x* = 0.

Penyelesaian :

Hasil ini secara geometri jelas, karena grafik dari $|x|$ memiliki suatu sudut di*x* = 0. Tetapi, penjelasan analitik dapat diberikan sebagai berikut :

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$$

Tetapi, $\dfrac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, & h > 0 \\ -1, & h < 0 \end{cases}$

Sehingga, $\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h} = -1$, dan $\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h} = 1$

Jadi $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$ tidak ada, sebab limitsepihaknya tidak sama. Akibatnya, $f(x) = |x|$ tidak dapat diturunkan di $x = 0$.

D. Rumus-rumus turunan

Rumus-rumus turunan diberikan guna mempermudah menentukan turunan suatu fungsi tanpa menggunakan definisi lengkap dari turunan itu sendiri.

1. Turunan fungsi konstan
   Jika *f* suatu fungsi konstan, sebut $f(x) = c$ untuk setiap *x*, maka $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = 0$: yaitu, $\frac{d}{dx}[c] = 0$
2. Aturan Pangkat
   Jika *n* bilangan real, maka :$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$
3. Misalkan *c* suatu konstanta dan fungsi *f* dapat diturunkan, maka fungsi cf juga dapat diturunkan sehingga :
   $$\frac{d}{dx}[cf \cdot (x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)]$$
4. Aturan penjumlahan dan pengurangan
   Jika *f* dan *g* dapat diturunkan di *x*, maka *f* + *g* juga dapat diturunkan di *x*, sehingga :$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)]$
   Begitu pula dengan *f* – *g* dapat diturunkan di *x*, sehingga,
   $$\frac{d}{dx}[f(x) - \ g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] - \frac{d}{dx}[g(x)]$$
5. Aturan perkalian.
   Jika *f* dan *g* dapat diturunkan di *x*, maka perkalian f · g juga dapat diturunkan di *x*, maka:

$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] +$
$g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$

6. Aturan pembagian
   Jika *f* dan *g* dapat diturunkan di *x* dan g(x) $\neq 0$, maka f/g dapat diturunkan di *x* sehingga,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

E. Turunan fungsi trigonometri

Untuk mendapatkan turunan fungsi trigonometri $(\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x,$ dan $\csc x)$, sudut *x* dinyatakan dalam radian, serta mengingat bahwa $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$ dan $\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h} = 0$, maka dapat diperoleh turunan fungsi trigonometri sebagai berikut.

1. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

   Bukti: :

$$\frac{d}{dx}[\sin x] = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left[\sin x\left(\frac{\cos h-1}{h}\right) + \cos x\left(\frac{\sin h}{h}\right)\right]$$
$$= \lim_{h\to 0}\left[\cos x\left(\frac{\sin h}{h}\right) - \sin x\left(\frac{1-\cos h}{h}\right)\right]$$

Karena $\sin x$ dan $\cos x$ tidak mengandung *h*, maka keduanya tetap konstan untuk $h \to 0$.

Jadi $\lim_{h\to 0}(\sin x) = \sin x$ *dan* $\lim_{h\to 0}(\cos x) = \cos x$

Akibatnya,

$\frac{d}{dx}[\sin x] = \cos x \cdot \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin h}{h}\right) - \sin x \lim_{h\to 0}\left(\frac{1-\cos h}{h}\right)$
$\frac{d}{dx}[\sin x] = \cos x \cdot (1) - \sin x \cdot (0) = \cos x$

Dengan cara yang sama, diperoleh pula turunan untuk fungsi trigonometri lainnya.

1. $\frac{d}{dx}[\cos x] = -\sin x$
2. $\frac{d}{dx}[\tan x] = sec^2\, x$
3. $\frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$
4. $\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$
5. $\frac{d}{dx}[\csc x] = \csc x \cot x$

Contoh 23:
Tentukan $f'(x)$ jika$f(x) = x^2 \tan x$.
Penyelesaian :

Dengan menggunakan aturan perkalian dan rumus turunan trigonometri, diperoleh

$$f'(x) = x^2 \cdot \frac{d}{dx}[\tan x] + \tan x \cdot \frac{d}{dx}[x^2]$$
$$= x^2 \sec^2 x + 2x \tan x$$

F. Aturan Rantai

Jika f dan g adalah dua fungsi yang dapat diturunkan dan *F = f o g* adalah komposisi fungsi yang didefinisikan oleh *F = f(g(x)),* maka *F* dapat diturunkan, dimana *F'* adalah suatu hasil kali yang dapat dituliskan sebagai berikut:

F'(x) = f'(g(x))g'(x).

Dalam notasi Leibniz, jika $y = f(u) dan\ u = g(x)$ serta keduanya dapat diturunkan, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Jika aturan rantai dikaitkan dengan aturan pangkat yang telah dijelaskan sebelumnya, maka diperoleh:

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

Contoh 24:

Dapatkan dy/dx jika$y = 4\cos(x^3)$.

Penyelesaian :

Misal $u = x^3$, maka$y = 4\cos u$

Dengan aturan rantai, diperoleh:

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}[4\cos u] \cdot \frac{d}{dx}[x^3]$

$= (-4\sin u) \cdot (3x^2) = (-4\sin(x^3)) \cdot (3x^3) =$
$-12x^2\sin(x^3)$

G. Turunan tingkat tinggi

Jika f' menyatakan turunan fungsi *f*, maka turunan dari f' dinotasikan dengan f''. Dengan demikian, turunan pertama, kedua, ketiga dan seterusnya dari fungsi f dinotasikan dengan:

$f', f'' = (f')', f''' = (f'')', f^4 = (f''')', f^5 = \left(f^{(4)}\right)', \ldots$

Notasi sederhana untuk menyatakan turunan tingkat *n*, dengan *n* bilangan bulat positif adalah $f^{(n)}$,yang merupakan turunan ke – *n* dari fungsi *f*.

Secara umum, dituliskan:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}[f(x)]$$

Yang dibaca turunan ke-*n* dari f terhadap *x*

Contoh 25:

Jika $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 2$, tentukan *f*'(*x*), *f*''(*x*), *f*'''(*x*), dan $f^{(iv)}(x)$!

Penyelesaian :

$f'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 2x - 4$

$f''(x) = 36x^2 - 12x + 2$

$f'''(x) = 72x - 12$

$f^{(iv)}(x) = 72$

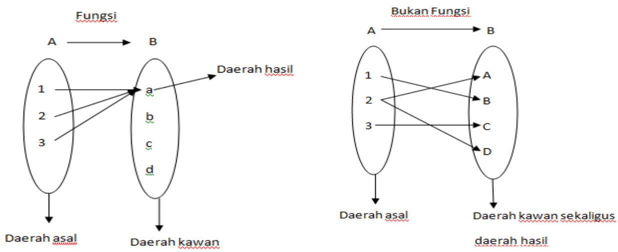
LKM (Lembar Kerja) Dan Latihan

LKM 01. Definisi fungsi, domain, kodomain dan range.

Tujuan : mahasiswa dapat memahami dan membuat definisi fungsi, domain, kodomain dan range.

I. Aktivitas awal dan diskusi

1. Buatlah 3 contoh fungsi dengan representasi (cara menyatakan) yang berbeda – beda sesuai dengan apa yang anda ketahui.
2. Perhatikan kedua gambar di bawah ini. Berdasarkan apa yang ditunjukkan oleh gambar mengenai daerah asal (domain), daerah kawan (kodomain) dan daerah hasil (range), coba buatlah definisi dari ketiga istilah tersebut.



3. Jelaskan mengapa contoh yang anda buat pada nomor 1 LKM 01 merupakan fungsi dan tentukan daerah asal dan daerah hasil dari ketiga contoh fungsi yang anda buat.
4. Berdasarkan pertanyaan 1 s.d 3 LKM 01, buatlah definisi fungsi misalkan fungsi dari himpunan A ke himpunan B.

Diskusikan pertanyaan berikut dalam kelompok, dan jelaskan.

DISKUSI 01:

Diberikan suatu fungsi dari luas suatu daerah, $y = 144 - 4x^2$. Tentukanlah domain dan range fungsi tersebut.

DISKUSI 02:

Tentukan range dari fungsi $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

Setelah memahami definisi fungsi, domain, kodomain, serta range fungsi, maka kerjakan latihan berikut untuk mengukur pemahamanmu.

II. Latihan (kerjakan secara individu)

1. Jelaskan definisi fungsi dari himpunan *A* ke himpunan *B*!
2. Tentukan domain dan range dari fungsi berikut.
   a. $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$
   b. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$
   c. $g(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x-3}$
   d. $g(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 6}$

LKM 02.Grafik fungsi

Tujuan : mahasiswa dapat menggambar grafik fungsi menggunakan geogebra dan manual serta memahami sifat transformasi grafik.

Perilaku fungsi akan lebih mudah diamati dengan adanya gambaran grafis, untuk itu cobalah lakukan kegiatan LKM 02.

I. Aktivitas awal dan Diskusi

1. Gambarlah grafik fungsi berikut dengan bantuan geogebra
   a) $f(x) = x + 5$
   b) $f(x) = x^2 – 5$
   c) $f(x) = 1/x$
2. Perhatikan gambar grafik yang telah diperoleh, apakah grafik tersebut memotong sumbu koordinat ketika nilai $x = 0$ atau$y = 0$? Lalu apa yang dapat disimpulkan, mengenai cara menentukan titik potong grafik terhadap sumbu x atau sumbu y?
3. Jika diminta menggambar grafik secara manual, coba jelaskan langkah apa yang harus dilakukan?
4. Apa yang terjadi jika setiap x diganti dengan $–x$ pada setiap fungsi nomor 1 pada LKM 02? Apakah menghasilkan fungsi yang sama atau berbeda? Jika berbeda, bagaimanakah perbedaanya? Buat dan bandingkan gambar grafiknya dengan grafik awal.
5. Bukalah file “transformasi 1” (buka tautan https://bit.ly/LKMGeoGebra), perhatikan luncuran a dan fungsi $f(x) = x^2 – 5+a$, cobalah menggeser a. Apa yang terjadi dengan grafik, jika fungsi $f(x)$ ditambahkan dengan suatu konstanta

positif ataupun negatif ? Bandingkan gambarnya dengan grafik awal!

6. Bukalah file “transformasi 2” (buka tautan https://bit.ly/LKMGeoGebra), perhatikan luncuran$a$ dan fungsi $f(x) = (x - a)^2 - 5$, cobalah menggeser a. Apa yang terjadi pada grafik, jika setiap $x$ditambahkan dengan suatu konstanta positif ataupun negatif? Bandingkan gambarnya dengan grafik awal!
7. Apa kesimpulan yang kamu peroleh dari soal 4,5, dan 6pada LKM 02 dengan adanyaperubahan bentuk grafik yang ditunjukkan?

Setelah memahami cara menggambar suatu grafik fungsi, kerjakan latihan berikut.

II. Latihan (kerjakan secara berkelompok tanpa bantuan geogebra)

Perhatikan definisi berikut sebelum menjawab pertanyaan.

Definisi :

a. Suatu grafik fungsi simetris terhadap sumbu y jika $f(x) = f(-x)$dan disebut sebagai fungsi genap
b. Suatu grafik fungsi simetris terhadap titik asal jika $f(x) = -f(x)$dan disebut juga sebagai fungsi ganjil.

Jawablah pertanyaan di bawah ini.

1. Selidiki apakah fungsi $y = f(x)$ berikut simetris terhadap sumbu x, sumbu y, atau titik asal, kemudian tentukan apakah fungsi tersebut fungsi genap, ganjil atau tidak keduanya.

   a. $y = x^3$

b. $y = -x^2$

c. $y = 3x + 4$

2. Buatlah sketsa grafik y = $\sqrt{x-3}$ dengan memanfaatkan sifat transformasi grafik yaitu fungsi y = $\sqrt{x}$.

LKM 03. Operasi fungsi

Tujuan : mahasiswa dapatmelakukan operasi fungsi dan menentukan domain dan rangedari hasil operasi fungsi.

Pada bilangan berlaku operasi bilangan dan pada fungsi juga berlaku operasi fungsi. Perhatikan definisi berikut.

i. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
ii. $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
iii. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
iv. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$ (mengapa?)

Bagaimanakah domain dan range fungsi yang merupakan hasil operasi dua fungsi atau lebih? Untuk itu, kerjakan LKM 03 berikut.

I. Aktivitas awal dan diskusi

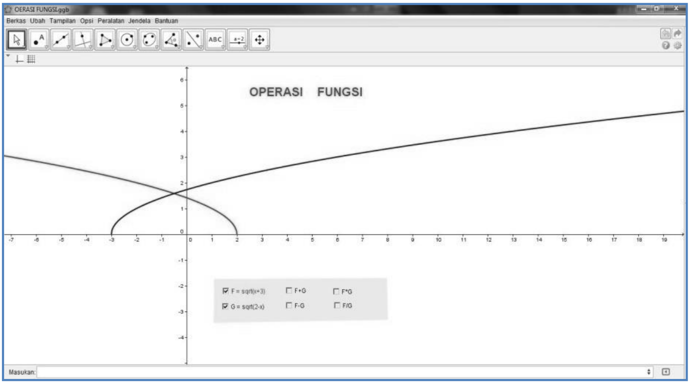
1. Diketahui fungsi $f(x) = \sqrt{2-x}$ dan $g(x) = \sqrt{x+3}$, tentukan hasil dari$(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$ dan$\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ beserta domain fungsi hasil operasi tersebut!
2. Setelah dibahas mengenai penggunaan operasi fungsi dalam geogebra, bandingkan hasilnya dengan jawaban yang telah kamu buat pada soal no 1 LKM 03!

Berikut ini diberikan operasi fungsi dengan geogebra.

Adapun langkah kerjanya sebagai berikut.

1. Buka file “operasi fungsi” (buka tautan https://bit.ly/LKMGeoGebra) pada geogebra.
2. Akan muncul tampilan seperti gambar dibawah ini, yakni terdapat tampilan dari dua fungsi:

$f(x) = \sqrt{x+3}$ dan $g(x) = \sqrt{2-x}$. Perhatikan kotak centang pada gambar!



Gambar 1. Tampilan operasi fungsi dalam geogebra

3. Lakukan operasi terhadap dua fungsi tersebut dengan memilih/mengklik salah satu operasi dalam kotak centang (terdapat operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian fungsi $f(x)$ dengan $g(x)$.
4. Perhatikan hasil yang muncul. Bandingkan dengan jawaban anda pada soal nomor 1 LKM 03.

II. Latihan (kerjakan secara individu tanpa bantuan geogebra)

Tentukan rumus fungsi$(f+ g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(f \,.\, g)(x)$ dan$\left({}^{f}/_{g}\right)(x)$, serta tentukan domain fungsi yang dihasilkan, jika diketahui :

1. $f(x) = 3\sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{2x}$
2. $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$

LKM 04. Komposisi fungsi

Tujuan : mahasiswa dapatmenemukan konsep komposisi dan dekomposisi fungsi.

Selain operasi penjumlahan, pengurangan, pembagian dan perkalian, juga terdapat operasi komposisi dalam fungsi. Kerjakan LKM 04 berikut.

I. Aktivitas awal dan diskusi

1. Diketahui fungsi $f(x) = \sqrt{x-1}$ dan $g(x) = 4 - x$.

   Tentukan domain $f(x)$ dan $g(x)$ serta komposisi baru yang terbentuk apabila :
   a. Setiap x pada $f(x)$ diganti dengan $g(x)$.
   b. Setiap x pada $g(x)$ diganti dengan $f(x)$.

   Apakah kedua komposisi baru yang terbentuk menghasilkan hasil yang sama? Coba tentukan domain fungsi baru yang terbentuk.
2. Diketahui suatu fungsi, misalkan $h(x) = 4x^2$, tuliskan $h(x)$ sebagai hasil dari komposisi dua fungsi.
3. Jika komposisi$g(x)$ pada $f(x)$ disimbolkan dengan $(f \ o \ g)(x)$ dan komposisi $f(x)$ pada $g(x)$ disimbolkan dengan $(g \ o \ f)(x)$, apa kesimpulan yang dapat diperoleh dari soal 1 dan 2 LKM 04 tentang definisi komposisi fungsi?

II. Latihan (Kerjakan Secara individu)

1. Tentukan hasil dari $(f \ o \ g)(x)$ dan $(g \ o \ f)(x)$ serta daerah asalnya, jika diberikan

   $$f(x) = \sqrt{x-2}, \quad g(x) = \frac{1}{x^2+4}$$

2. Uraikan fungsi berikut sebagai komposit dua fungsi dengan dua cara yang berbeda.

   a. $f(x) = (x - 5)^7$

   b. b. $f(x) = \sin^2 x$

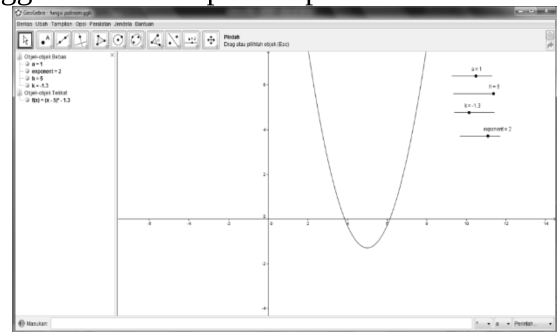
Beberapa jenis fungsi yang dipelajari dalam kuliah ini adalah fungsi aljabar dan fungsi trigonometri. Lakukan kegiatan LKM 05 - 07 untuk memahami fungsi tersebut.

LKM 05. Fungsi aljabar

Tujuan : mahasiswa dapat memahami konsep fungsi linear dan kuadrat.

I. Aktivitas awal dan diskusi

Buka file “fungsi polinom” (buka tautan https://bit.ly/LKMGeoGebra) dalam geogebra, sehingga muncul tampilan seperti berikut.



Gambar 2. Fungsi polinom

Gambar yang dihasilkan pada panel gambar adalah gambar dari fungsi $\boldsymbol{f(x) = a(x - h)^{\text{eksponen}} + k}$. Perhatikan ”luncuran” yang ada di panel gambar. Cobalah menggeser setiap “luncuran” dengan *mouse*, kemudian perhatikan perubahan yang terjadi pada panel gambar dan tampilan aljabar di panel masukan untuk menjawab pertanyaan berikut ini.

a. Bagaimana bentuk grafik saat exponen adalah 1, sedangkan luncuran yang lain diubah-ubah?
b. Apa yang terjadi jika nilai a diubah-ubah saat exponent sama dengan 1 ?
c. Apa yang terjadi jika *h* dan *k* diubah-ubah saat exponen sama dengan1, dimana *a* sebarang nilai konstan?
d. Perhatikan perubahan nilai absis dan nilai ordinat saat kemiringan grafik berubah. Adakah

hubungan antara perubahan nilai absis dan ordinat dengan kemiringan garis? Jika ada tuliskan hubungan tersebut!

e. Apa yang dapat disimpulkan mengenai kemiringan garis dan titik potong garis dengan sumbu koordinat dalam suatu fungsi linier (exponen sama dengan 1)?

f. Bagaimana bentuk kurva saat exponen sama dengan 2 sedangkan a,h dan k diubah-ubah?

g. Perubahan apa yang terjadi jika nilai a diubah-ubah saat exponen sama dengan 2 dengan h dan k tetap?

h. Perubahan apa yang terjadi saat exponen sama dengan 2, dengan nilai a tetap sedangkan h dan k diubah-ubah?

i. Kesimpulan apa yang dapat diperoleh dari tampilan pada poin f, g, h LKM 05 jika dikaitkan dengan bentuk grafik dan titik potong fungsi kuadrat dengan sumbu koordinat?

II. Latihan (kerjakan secara individu)

1. Tentukan kemiringan garis berikut.
   a. $x - y = 2$
   b. $3x - 2y + 8 = 0$
2. Analisalah bentuk grafik berikut dan tentukan titik potong grafik dengan sumbu x dan sumbu y jika ada.
   a. $y = x^2 + 2x - 3$
   b. $y = x^2 - 3x - 4$

LKM 06. Invers Fungsi

Tujuan : mahasiswa dapat menemukan konsep invers fungsi.

Kebalikan suatu fungsi disebut sebagai invers fungsi. Untuk memahami invers suatu fungsi, diskusikan LKM 06 berikut ini.

I. Aktivitas awal dan diskusi

1. Diberikan suatu fungsi $f(x) = 2x$ dan $g(x) = ½\ x$ adalah fungsi y dalam x karena $f(x)=2x$ dapat ditulis sebagai $y = 2x$, begitu juga $y = g(x) = ½\ x$. Coba nyatakan fungsi tersebut sebagai bentuk$x$ dalam y ($x = f(y)$).
2. Tentukan $(f \circ g)(x)$ dan $(g \circ f)(x)$ dari fungsi pada soal nomor 1 LKM 06!
3. Gambarkan fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ dengan geogebra, perhatikan hasilnya. Adakah aturan transformasi yang memungkinkan untuk menghasilkan $g(x)$ dari $f(x)$?
4. Perhatikan jawaban pada soal nomor 1 LKM 06, adakah kesamaan hasil antara bentuk y dalam $x$pada $f(x)$ dengan bentuk x dalam y pada $g(x)$? Kemudian bagaimana hasil pada soal nomor 2 LKM 06, apakah sama atau berbeda?
5. Jika $y = f(x)$ dapat dinyatakan sebagai $x = f(y)$, maka dikatakan bahwa $x = f(y)$ adalah invers dari $y = f(x)$, dan jika $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$, maka dapat dikatakan $f(x)$ dan $g(x)$ saling invers. Berdasarkan soal 1, 2, 3 dan 4 LKM 06, kesimpulan apa yang dapat diperoleh tentang cara menentukan invers suatu fungsi?

II. Latihan(Kerjakan secara individu).

a. Tentukan invers fungsi berikut:

   a. $f(x) = 6x$

   b. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

   c. $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$

b. Fungsi yang bagaimanakah yang memiliki invers?

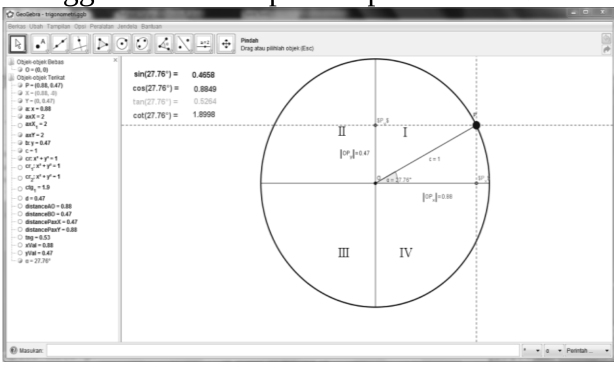
LKM 07.Fungsi trigonometri

Tujuan : mahasiswa dapat memahami konsep dasar fungsi trigonometri.

Selain fungsi aljabar, selanjutnya dibahas fungsi trigonometri. Sebagai kegiatan awal dalam fungsi trigonometri, kerjakan LKM 07 berikut.

I. Aktivitas awal dan diskusi

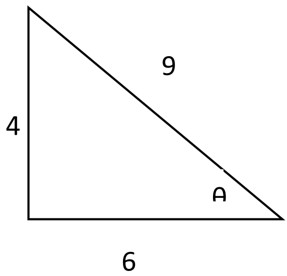
1. Bukalah file “trigonometri” (buka tautan https://bit.ly/LKMGeoGebra) dalam geogebra, sehingga muncul tampilan seperti berikut.

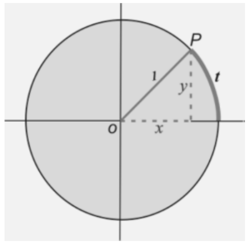


Gambar 3. Fungsi trigonometri

Cobalah menggeser titik P pada panel gambar. Perhatikan sinar garis yang membentuk sudut dan lihat perubahan yang terjadi pada nilai-nilai yang muncul di sebelah kiri gambar lingkaran. Catat beberapa sudut yang kalian amati serta nilai yang dihasilkan di bagian kiri gambar. Bandingkan nilai-nilai tersebut dengan gambar yang kalian amati. Adakah hubungan diantara keduanya? Jelaskan!

2. Setelah mengerjakan nomor 1 LKM 07, tentukan sinus, cosinus, dan tangent sudut θ dari gambar berikut.





3. Tuliskan hubungan antara sinus, cosinus dan tangent.

II. Latihan (Kerjakan secara berkelompok dengan bantuan geogebra).

Perhatikan persamaan berikut sebelum mengerjakan latihan.

a. $\csc x = \frac{1}{\sin x}$

b. $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

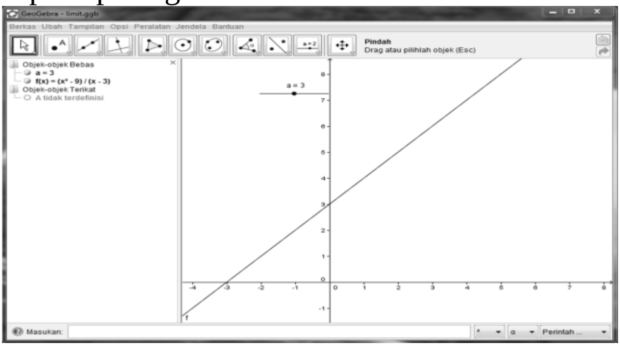
1. Coba gambarkan fungsi trigonometri yang lain, yaitu $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$ dan telaah hasil yang diperoleh (rentangan nilai dan periode fungsi).
2. Buktikan bahwa $\dfrac{\sec^2 t - 1}{\sec^2 t} = \sin^2 t$.
3. Selidiki apakah fungsi $\cot x$ adalah fungsi genap, ganjil atau tidak keduanya?

LKM 08. Limit fungsi

Tujuan : mahasiswa dapat membuat dan memahami definisi limit serta menentukan nilai limit fungsi.

I. Aktivitas awal dan diskusi

1. Bukalah file “limit” (buka tautan https://bit.ly/LKMGeoGebra), sehingga tampil seperti pada gambar berikut.



Gambar 4. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

Perhatikan gambar grafik pada gambar 4, kemudian jawablah pertanyaan berikut:

a. Letakkan luncuran$a$ = 2, kemudian cobalah menggeser luncuran$a$ ke kanan, perhatikan nilai $f(x)$, apakah $f(x)$ terdefinisi di setiap nilai $x = a$? Jika tidak, dimanakah $f(x)$ tidak terdefinisi?

b. Cobalah menggeser perlahan luncuran $a = 2$ ke kanan, dan perhatikan nilai $f(x)$ saat a mendekati $a = 3$, kemudian letakkan luncuran $a = 4$, lalu geser perlahan ke kiri menuju $a = 3$, berapakah nilai yang ditunjukkan saat a mendekati a =3 dan saat $a = 3$?

c. Apa yang dapat disimpulkan tentang nilai $f(x)$ saat x mendekati 3?

2. Pada soal 1 LKM 08 telah diperlihatkan secara grafis fungsi $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$. Sekarang, cobalah tentukan nilai $f(x)$ ketika x mendekati 3, dengan melengkapi tabel berikut.

x	2	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	4
$f(x)$												

a. Perhatikan nilai x dalam tabel dimana nilai x adalah persekitaran untuk x = 3. Kemudian perhatikan nilai $f(x)$, apakah nilai tersebut merupakan suatu persekitaran dari nilai tertentu saat x mendekati 3?

b. Apa yang terjadi saat x = 3 disubstitusi secara langsung pada $f(x)$?

c. Pandang nilai $x < 3$ sebagai hampiran nilai $x = 3$ dari sisi kiri, dan nilai $x> 3$ sebagai hampiran nilai $x = 3$ dari sisi kanan.Jika dikaitkan dengan nilai $f(x)$ apa yang dapat disimpulkan?

d. Jika nilai $f(x)$ saat x mendekati 3 yang dihampiri dari sisi kiri dinamakan limit kiri $f(x)$ yang disimbolkan dengan $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$, dan nilai $f(x)$ saat x mendekati 3 yang dihampiri dari sisi kanan dinamakan limit kanan $f(x)$ yang disimbolkan dengan $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$, tuliskan kembali hasil yang diperoleh pada soal 2c LKM 08?

e. Berdasarkan hasil yang diperoleh dari soal no 2a sampai dengan 2d LKM 08, simpulkanlah berapa nilai $f(x)$ saat x mendekati 3 atau disebut juga sebagai nilai limit dari $f(x)$ saat x mendekati 3 yang disimbolkan dengan $\lim_{x \to 3} f(x)$?

3. Diberikan suatu fungsi, $f(x) = \frac{1}{x-3}$. Cobalah tentukan nilai $f(x)$ ketika x mendekati 3, dengan melengkapi tabel berikut.

x	2,5	2,6	2,8	2,9	2,95	2,99	3,01	3,05	3,1	3,2	3,4	3,5
$f(x)$												

Perhatikan tabel di atas, jawablah pertanyaan sesuai poin a, b, c, d, e seperti soal nomor 2 LKM 08.

4. Jika nilai suatu fungsi $f(x)$ sama dengan L saat x mendekati suatu nilai tertentu, misal x mendekati a, dikatakan sebagai nilai limit $f(x)$ saat x mendekati a sama dengan L. Sesuai dengan apa yang dibahas dalam soal 1, 2 dan 3 LKM 08, kesimpulan apa yang dapat ditulis mengenai definisi limit fungsi secara umum?

Setelah memahami definisi limit, coba kerjakan latihan di bawah ini.

II. Latihan (Kerjakan secara individu)

1. Jelaskan definisi limit $f(x)$ saat x mendekati a!
2. Tentukan nilai limit fungsi berikut dengan bantuan tabel dan grafik.

   a. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ b. $\lim_{x \to 2} 2x - 1$ c. $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x+2}$

LKM 09. Aturan limit dasar

Tujuan : mahasiswa dapat menemukan konsep aturan limit dasar fungsi konstan, fungsi $y = x$, fungsi polinom dan limit tak hingga.

Terdapat beberapa aturan dasar dalam menentukan nilai limit suatu fungsi, yang dapat memudahkan kita menghitung nilai limit fungsi tersebut. Untuk memahami aturan tersebut, maka diskusikan LKM 09 berikut.

I. Aktivitas awal dan diskusi

1. Lengkapi tabel fungsi $f(x) = \dfrac{1}{x}$ berikut.

x	1	2	5	10	20	50	100	1000	1000000	10000000
$f(x)$										

a. Bagaimana nilai $f(x)$ saat nilai x semakin bertambah?

b. Jika x adalah suatu nilai yang sangat besar, yang disebut sebagai tak hingga dengan simbol ∞, berapakah kira-kira nilai $f(x)$?

c. Jika nilai $f(x)$ saat x tak hingga dinyatakan sebagai $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, apa yang dapat disimpulkan dari hasil nomor 1 LKM 09?

2. Buatlah gambar grafik $y = 3$. Kemudian perhatikan grafik tersebut untuk menjawab pertanyaan berikut.
   a. Berapakah nilai y saat x mendekati 0 $\left(\lim\limits_{x\to 0} y\right)$?
   b. Berapakah nilai y saat x mendekati 5 $\left(\lim\limits_{x\to 5} y\right)$?
   c. Berapakah kira – kira nilai y jika x mendekati tak hingga $\left(\lim\limits_{x\to\infty} y\right)$?

d. Jika $f(x) = 3$ secara umum dipandang sebagai suatu fungsi konstan $f(x) = k$, apa yang dapat disimpulkan tentang nilai limit fungsi konstan $f(x)$ saat x mendekati suatu nilai tertentu yakni x mendekati 0, x mendekati a dan x mendekati ∞?

3. Buatlah gambar grafik $y = x$, jawablah pertanyaan yang sama seperti soal 2a, 2b dan 2c LKM 09. Lalu jika $y = f(x) = x$, apa yang dapat disimpulkan tentang nilai limit $f(x)$ saat x mendekati 0, x mendekati a dan x mendekati ∞?

4. Jika $f(x) = x^2 - x + 1$, tentukan $\lim_{x\to 1} f(x)$ dengan dua cara :

   a. Membuat tabel bantuan dengan mencari nilai $f(x)$ dipersekitaran $x = 1$.

   b. Mensubstitusi langsung $x = 1$ pada $f(x)$.

   Lalu bandingkan hasilnya.

5. Jika $f(x)$ adalah suatu fungsi polinom dimana $f(x) = ax^n + \cdots + bx + c$. Apa yang dapat disimpulkan berdasarkan hasil pada soal 4 LKM 09 tentang nilai $f(x)$ saat x mendekati suatu nilai tertentu, misal x mendekati a?

6. Jika $f(x)$ adalah fungsi polinom, berapakah nilai limit $f(x)$ saat x mendekati nilai yang sangat kecil ($-\infty$) dan saat x mendekati nilai yang sangat besar ($+\infty$)?

7. Apa yang dapat disimpulkan dari hasil pada soal 6 LKM 09, mengenai $\lim_{x\to\infty} ax^n + \cdots + bx + c$?

II. Latihan (Kerjakan secara individu)

Tentukan nilai limit fungsi berikut dengan bantuan aturan limit dasar!

1. $\lim\limits_{x \to 0} 1$
2. $\lim\limits_{x \to 0} x$
3. $\lim\limits_{x \to \infty} 1$
4. $\lim\limits_{x \to 1} x^2 + x + 1$
5. $\lim\limits_{x \to \infty} x^3 + x + 2$

Pada bab fungsi, telah dibahas mengenai operasi fungsi. Sekarang akan dibahas mengenai nilai limit dalam operasi fungsi. Coba kerjakan LKM di bawah ini.

LKM 10. Limit dalam operasi fungsi.

Tujuan : mahasiswa dapat memahami nilai limit dalam operasi fungsi.

Sebelum mengerjakan LKM 10, perhatikan definisi berikut.

Suatu fungsi $f(x) \leq g(x)$ jika hanya jika $f(x) \leq g(x), \forall\, x \in R$.

I. Aktivitas awal dan diskusi

1. Diketahui $f(x) = 2x + 3$ dan $g(x) = x^2 - 2x$. Pada saat x mendekati 1, tentukan nilai dari:
   a. Limit ($f(x) + g(x)$) dan limit $f(x)$ + limit $g(x)$. Bandingkan hasilnya!
   b. Limit ($f(x) -$ g(x)) dan limit $f(x)$ - limit $g(x)$. Bandingkan hasilnya!
   c. Limit ($f(x)$. g(x)) dan limit $f(x)$. limit $g(x)$. Bandingkan hasilnya!
   d. Limit ($f(x)$ / $g(x)$) dan limit $f(x)$ limit $g(x)$. Bandingkan hasilnya!
2. Diketahui suatu fungsi $f(x) = x + 3$, kalikan fungsi tersebut dengan suatu konstanta, c = 3. Tentukan nilai limit $f(x)$ saat x mendekati 0, untuk $f(x)$ yang telah dikalikan dengan konstanta.Kemudian hitung juga $\left(\lim_{x\to 0} 3\right)\left(\lim_{x\to 0} x+3\right)$.

   Bandingkan hasil yang kamu peroleh!
3. Diketahui suatu fungsi $f(x) = x$ - 2, kemudian dipangkatkan 2. Hitunglah nilai $\left(\lim_{x\to 3} x-2\right)^2$ dan nilai $\lim_{x\to 3}(x-2)^2$, bandingkan hasilnya.
4. Berdasarkan perbandingan hasil yang diperoleh pada soal 1, 2 dan 3 LKM 10, kesimpulan apa yang dapat diperoleh mengenai nilai limit dalam

operasi fungsi ketika x mendekati suatu nilai tertentu?

5. Diberikan tiga buah fungsi, yaitu $f(x) = 1 - \frac{x^2}{6},\ \ g(x) = 1 - \frac{x^2}{4},\ \ h(x) = 1$

   a. Gambarkan grafik dari ketiga fungsi tersebut, kemudian urutkan fungsi tersebut dari terkecil ke terbesar.
   b. Tentukan limit ketiga fungsi tersebut saat $x \to 0$!
   c. Kesimpulan apa yang dapat diperoleh dari soal 5a dan 5b LKM 10, jika urutan fungsi dikaitkan dengan nilai limitnya?

II. Latihan (kerjakan secara individu)

Tentukan nilai dari:

1. $\lim\limits_{x \to 3} (x-2)^3$
2. $\lim\limits_{x \to -1} (3x^2 + 2) + (x + 5)$
3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{5x}{\sqrt[4]{x^3 + 4x + 11}}$
4. $\lim\limits_{x \to -1} 4(3x^2 + 2)$
5. $\lim\limits_{x \to -1} (3x^2 + 2)(x + 5)$

LKM 11. Limit fungsi rasional.

Tujuan : mahasiswa dapat memecahkan masalah limit dengan nilai limit penyebut sama dengan nol atau tak hingga.

Suatu fungsi rasional juga merupakan hasil operasi dua fungsi, yaitu operasi pembagian. Bagaimana, jika nilai limit yang dicari tidak dapat diselesaikan dengan aturan limit dasar ataupun limit dalam operasi fungsi. Untuk itu, diskusikan LKM 11 berikut.

I. Aktivitas awal dan diskusi

1. Tentukan nilai dari $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ tanpa bantuan tabel, tetapi dengan menggunakan aturan dasar dan teorema dalam limit.
   a. Dapatkah kamu menentukan nilai limitnya?
   b. Dapatkah kamu menghitungnya dengan mensubstitusi langsung $x = 3$ pada fungsi rasional tersebut?
   c. Jika tidak, gunakan manipulasi aljabar, kemudian tentukan nilai limitnya.
2. Tentukan nilai dari $\lim_{x \to 3} \frac{x + 3}{x^2 - 9}$, kemudian jawablah pertanyaan seperti pada soal nomor 1.
3. Apa yang dapat disimpulkan dari soal 1 dan 2 LKM 11?
4. Tentukan nilai dari :
   a. $\lim_{x \to 100} \frac{2x^3 + 4x^2 + 3x + 5}{3x^3 + 5x^2 + 2x + 1}$ dengan menggunakan aturan limit.

b. $\lim\limits_{x \to 100} \dfrac{2x^3 + 4x^2 + 3x + 5}{3x^3 + 5x^2 + 2x + 1}$

dengan membagi setiap suku dengan variabel berpangkat tertinggi.

Bandingkan hasil yang diperoleh dengan poin a!

c. Berdasarkan cara pada soal 4b LKM 11, tentukan $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3 + 4x^2 + 3x + 5}{3x^3 + 5x^2 + 2x + 1}$

5. Apa kesimpulan yang diperoleh dari soal 4 LKM 11?

II. Latihan (kerjakan secara individu)

Tentukan nilai dari :

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$
2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4}$

Suatu fungsi yang telah dipelajari pada bab sebelumnya adalah suatu fungsi yang terdefinisi di setiap domain yang telah ditentukan ataupun di setiap nilai riil *x*, jika suatu fungsi tidak terdefinisi pada satu nilai *x*, bagaimanakah bentuk fungsi tersebut, dan bagaimana pula kaitannya dengan nilai limit? Untuk memahami hal tersebut, kerjakan LKM 12 di bawah ini.

LKM 12. Kontinuitas fungsi

Tujuan : mahasiswa dapat memahami fungsi kontinu dan diskontinu

I. Aktivitas awal dan diskusi

1. Gambarlah grafik $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ pada selang [-4,4], kemudian jawablah pertanyaan berikut:
   a. Apakah $f(x)$ terdefinisi di setiap nilai x pada selang?
   b. Tentukan $\lim_{x \to 2} f(x)$!
   c. Tentukan $f(2)$!
   d. Apakah nilai $f(2) = \lim_{x \to 2} f(x)$?
   e. Bagaimana seharusnya domain x didefinisikan agar terdapat $f(x)$ yang memenuhi?
2. Gambarlah grafik $f(x) = x^2 - 3x - 4$, kemudian jawablah pertanyaan yang sama seperti pada soal 1 LKM 12.
3. Adakah perbedaan antara grafik fungsi pada soal 1 dan 2 LKM 12? Dimanakah letak perbedaanya ? Jelaskan!
4. Jika suatu grafik yang digambarkan dengan kurva kontinu tanpa pengecualian nilai x sehingga untuk setiap x terdapat tepat satu $f(x)$ yang memenuhi disebut sebagai fungsi kontinu, sedangkan disebut diskontinu jika berlaku sebaliknya, tergolong fungsi manakah soal 1 dan 2 untuk LKM 12?
5. Berdasarkan jawaban soal 1 dan 2 LKM 11, buatlah definisi fungsi kontinu berkaitan dengan nilai limit fungsi $f(x)$ saat x medekati a dan nilai fungsi $f(x)$ saat $x = a$.

II. Latihan (Kerjakan secara individu)

Tentukan apakah fungsi berikut kontinu atau diskontinu

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

2. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x > 1 \\ 2 & , x = 1 \\ 3x^2 - 1, & x < 1 \end{cases}$

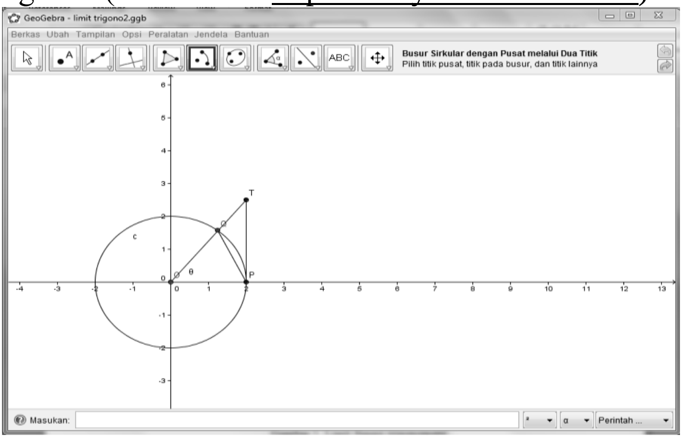
LKM 13. Limit fungsi trigonometri.

Tujuan : mahasiswa dapat memahami konsep limit fungsi trigonometri

Nilai limit fungsi trigonometri tidak serta merta dapat ditentukan langsung oleh aturan limit fungsi aljabar, sehingga diperlukan aturan khusus. Maka kerjakan LKM 13 berikut untuk menemukan dan memahami aturan limit fungsi trigonometri.

I. Aktivitas awal dan diskusi

Perhatikan gambar di bawah ini. Buka file "limit trigono" (buka tautan https://bit.ly/LKMGeoGebra).



Gambar 5. Limit fungsi trigonometri

Berdasarkan gambar di atas, jawablah pertanyaan berikut.

1. Lihat ΔOPQ, juring OPQ dan segitiga OPT. Tentukan urutan luasnya berdasarkan gambar!
2. Tentukan luas masing - masing dengan memanfaatkan aturan trigonometri, kemudian substitusi ke pertidaksamaan yang diperoleh pada soal 1a LKM 13!

3. Lalu bagi setiap hasil dengan $\frac{1}{2}r^2 \sin\theta$, dan gunakan teorema apit.

4. Berdasarkan hasil tersebut tentukan $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta}$ atau secara umum $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$.

II. Latihan (kerjakan secara individu)

1. Tentukan $\lim_{h \to 0} \frac{1 - \cos h}{h}$

2. Tentukan nilai dari $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$

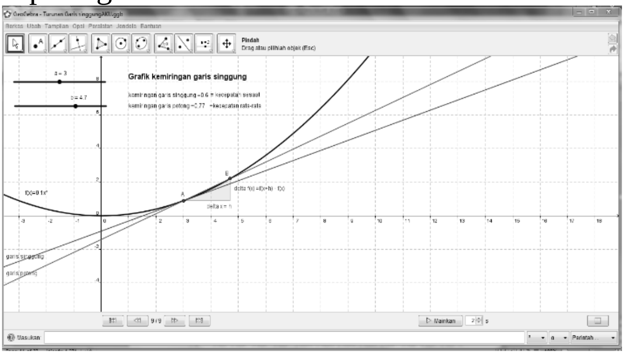
Konsep awal turunan suatu fungsi adalah kemiringan garis singgung suatu kurva dan kecepatan sesaat suatu benda setelah waktu t. Berikut ini akan dibahas mengenai konsep turunan.

LKM 14. Definisi turunan fungsi

Tujuan : mahasiswa dapat memahami definisi turunan fungsi

I. Aktivitas awal dan diskusi

1. Bukalah file “turunan fungsi” (buka tautan https://bit.ly/LKMGeoGebra), maka akan tampil seperti gambar di bawah ini.



Gambar 06. Fungsi dengan turunan dan garis singunggnya

Perhatikan gambar dan jawablah pertanyaan berikut.

a. Tampilan pada gambar adalah tampilan grafik fungsi $f(x) = 0{,}1x^2$ dengan garis singgung (garis merah) beserta garis yang memotong grafik (warna merah muda). Perhatikan luncuran yang ada pada panel gambar. Coba gerakkan masing – masing luncuran, perubahan apa yang terjadi? Jelaskan!

b. Apa yang terjadi, saat titik B semakin dekat dengan titik A? apa pula yang terjadi saat titik B semakin jauh dengan titik A? Kemudian apa yang terjadi saat titik A sama dengan titik B (luncuran a = b)?

c. Perhatikan garis yang memotong grafik $f(x) = 0{,}1x^2$, coba tempatkan luncuran a = 6, dan luncuran b = 3, kemudian hitunglah kemiringan garis yang memtong grafik tersebut dengan formula yang telah diketahui saat pokok bahasan kemiringan fungsi linear, apakah hasilnya sama dengan nilai kemiringan yang ditunjukkan pada panel gambar?

d. Jika luncuran a = b = 3, dapatkah kamu menghitung kemiringan garis potong dengan formula yang sama pada soal 1c LKM 14? Jika tidak berikan alasannya!

e. Pada saat luncuran a = b, perhatikan "delta x = h" pada gambar, berapakah nilai h? Dapatkah dihitung kemiringan garis potong dengan formula 1c LKM 14? Jika tidak, kaitkan konsep limit saat titik A semakin dekat titik B untuk menentukan kemiringan garis potong, dengan menggunakan "delta $f(x) = f(x + \mathrm{h}) - f(x)$".

f. Berdasarkan pertanyaan1a sampai dengan 1e LKM 14, apa yang disimpulkan untuk menentukan kemiringan garis singgung grafik dengan bantuan kemiringan garis yang memotong grafik?

g. Selesaikanlah formula yang diperoleh pada soal 1f LKM 14, dengan mensubtitusi $f(x) = 0{,}1x^2$, kemudian simpulkan berapa kemiringan garis singgung fungsi $f(x) = 0{,}1x^2$ di suatu titik x?

2. Diberikan suatu fungsi jarak, $s(t) = 25t^2 + 10t$ yang menyatakan jarak yang ditempuh bus setelah t jam.

a. Tentukan kecepatan bus setelah 1 jam, dapatkah dihitung kecepatannya secara langsung? Jika tidak, coba gunakan pendekatan dengan menghitung kecepatan rata- rata dengan interval $1 \leq t \leq 2$.

b. Jika diberikan selang waktu yaitu:
$0 \leq t \leq 1;\ 0{,}5 \leq t \leq 1;\ 0{,}8 \leq t \leq 1;\ 0{,}99 \leq t \leq 1;\ 1 \leq t \leq 1{,}01;$
$1 \leq t \leq 1{,}2\ dan\ 1 \leq t \leq 1{,}5.$ Hitunglah kecepatan sesaat setelah 1 jam dengan menggunakan formula kecepatan rata- rata. (Buatlah tabel untuk menghitung kecepatan berdasarkan selang yang telah diberikan).

c. Bagaimana nilai kecepatan saat selang semakin kecil? Apakah mendekati nilai tertentu?

d. Kecepatan yang dihitung adalah kecepatan rata – rata,jika formula kecepatan rata-rata adalah pendekatan terhadap nilai kecepatan sesaat, tentukan formula kecepatan sesaat dengan mengkaitkan kecepatan rata-rata dengan konsep limit? (gunakan saat t mendekati 1).

e. Jika waktu setelah t disebut $t + h$ dan saat $t + h$ sangat dekat dengan t, maka h akan mendekati nol, rumuskan cara untuk memperoleh kecepatan setelah$t$, saat h mendekati nol !

3. Jika gradien garis singgung suatu grafik dikatakan sebagai turunan fungsi, misalnya turunan fungsi $f(x)$ di titik A. Begitu juga dengan kecepatan sesaat yang diperoleh dengan proses limit terhadap fungsi jarak. Kesimpulan apa yang diperoleh untuk mendefinisikan turunan $f(x)$yang dinotasikan dengan $f'(x)$ di titik x = a?

Catatan : turunan suatu fungsi $f(x)$ terhadap x dapat dituliskan secara lebih singkat dengan notasi Leibniz, yaitu .

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

Setelah memahami konsep turunan, cobalah latihan berikut untuk mengukur pemahamanmu.

II. Latihan (Kerjakan secara individu)

1) Tentukan gradien garis singgung grafik $y = 3x^2$ dititik (1, 3). Gambarkan grafik dan garis singgungnya!
2) Suatu partikel bergerak sesuai fungsi jarak $s = \frac{t^3}{6}$, dimana t adalah waktu dalam detik dan s adalah jarak yang ditempuh dalam meter. Tentukan kecepatan partikel setelah 1 detik.
3) Tentukan turunan fungsi $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ dan gambarkan grafik fungsi beserta turunannya!

LKM 15. Rumus-rumus turunan

Tujuan : mahasiswa dapat menemukan rumus – rumus dalam turunan

Menentukan turunan suatu fungsi sesuai definisi turunan memerlukan langkah yang cukup panjang untuk beberapa fungsi, maka dari itu, pada beberapa fungsi khusus, akan diselidiki rumus – rumus yang bisa membantu mempercepat dalam menentukan turunan suatu fungsi. Untuk itu kerjakan LKM 15 berikut.

I. Aktivitas awal dan diskusi

1. Tentukan turunan fungsi berikut dengan definisi$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)f(x)}{h}$
   a. $f(x) = c$
   b. $f(x) = x^n$
   c. $f(x) = \sin x$
   d. $f(x) = \cos x$
   e. $P'(x)$ dimana$P(x) = f(x) \cdot g(x)$
   f. $P'(x)$ dimana $P(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$
   (gunakan hasil pada poin e)
2. Apa kesimpulan secara umum yang bisa diperoleh dari soal 1 LKM 15?

Setelah memahami rumus-rumus dalam turunan, coba kerjakan latihan berikut.

II. Latihan (kerjakan secara individu)

Gunakan rumus-rumus turunan untuk menyelesaikan soal-soal berikut :

1. $f(x) = \frac{x^2}{x^3-1}$
2. $f(x) = (2x-8)(x^3-4)$

3. $f(x) = 8x^3 - 2x^2 + x + 6$
4. $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$
5. $f(x) = 2x \cos x$

Pada beberapa fungsi tertentu yang lebih rumit, rumus turunan pada LKM sebelumnya tidaklah cukup, maka diperlukan aturan baru yang dapat membantu dalam menemukan turunan suatu fungsi. Untuk itu kerjakan LKM 16 berikut.

LKM 16. Aturan rantai dan turunan tingkat tinggi

Tujuan : mahasiswa dapat menemukan dan memahami aturan rantai dan turunan tingkat tinggi.

I. Aktivitas awal dan diskusi

1. Diketahui suatu fungsi $p(x)$= $(3x^2 + 5x)^5$
   a. Dapatkah kamu menentukan langsung $p'(x)$ dengan aturan turunan yang sudah dipelajari sebelumnya ?
   b. Jika tidak, coba pikirkan $p(x)$ sebagai komposisi dua fungsi sehingga dapat ditulis $(x) = \ (fog)\ (x)$! Apa yang kamu peroleh?
   c. Setelah memperoleh $f(x)$ dan $g(x)$ sebagai hasil dekomposisi $p(x)$, cobalah menurunkan $(fog)\ (x)$, di mana $(fog)'\ (x)$ adalah hasil kali turunan $f(x)$ di $g(x)$ dan turunan $g(x)$ di x.
   d. Apa kesimpulan yang diperoleh untuk $p'(x) = (fog\ )'\ (x)$?
   e. Jika $g(x)$ dimisalkan sebagai u, sehingga fungsi yang didekomposisi dinyatakan sebagai fungsi dalam u dan diperoleh $f(u) = u^5$. Tentukan $f'(u)$ sesuai kesimpulan pada soal 1d LKM 16.
2. Diketahui suatu fungsi $f(x) = \ 3x^3 + 2x^2 + x$. Jika $f'(x) \ = g(x) = \ 9x^2 + 4x + 1$
   a. Tentukan $g'(x)$
   b. $g'(x)$adalah turunan dari $g\ (x)$ dan $g\ (x)$ turunan dari $f\ (x)$, apa yang dapat disimpulkan untuk $f''(x)$yang merupakan turunan kedua dari $f\ (x)$?

c. Jika suatu fungsi diturunkan hingga turunan ke–n, tuliskan notasi dan formula turunan ke–n dari $f(x)$ sesuai notasi Leibniz.

II. Latihan (Kerjakan secara individu)

1. Tentukan $f'(x)$ dengan aturan rantai.
   a. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$
   b. $f(x) = sin^2 x$
2. Tentukan $f'(x)$ dan $f''(x)$ untuk fungsi berikut.
   a. $f(x) = t^8 - 7x^6 + 2x^4$
   b. $f(x) = \cos 2x$

DAFTAR PUSTAKA

Hohenwarter, M., Hohenwarter, J. 2008. *Bantuan Geogebra 3.0*. *Geogebra* Online. Diakses di www.*geogebra*.org, 15 Maret 2012.

Hohenwarter, M., Hohenwarter, J., Kreis, Y., & Lavicza, Z. 2008. "Teaching and Learning Calculus with Free Dynamic Mathematics Software GeoGebra". *Paper*. Disajikan pada 11th International Congress on Mathematical Education. Monterrey, Nuevo Leon, Mexico.

Purwanto, Heri., Gina Indriyani, Erlina Dayanti. 2005. *Kalkulus*. Jakarta : PT. Ercontara Rajawali

Stewart, James. 2012. *Kalkulus 5th edition*. ebook

Tim. 2002. *Buku Ajar Kalkulus 1*. Surabaya : Fakultas MIPA ITS

Widana, I Nyoman. 2006. *Kalkulus 1*. Denpasar : Fakultas MIPA Udayana

PROFIL PENULIS

Ni Ketut Erawati adalah anak keempat dari empat bersaudara yang lahir pada 2 Agustus 1986 di Sukawati, Bali. Penulis adalah anak asli Bali yang lahir dari pasangan I Nyoman Wangaya dan Ni Wayan Rumet. Ibu satu anak yang menunggu kelahiran anak kedua ini merupakan seorang dosen swasta di Bali. Beliau menamatkan ijasah S1 di bidang matematika di Universitas Udayana dan S2 di bidang pendidikan matematika di Unversitas Pendidikan Ganesha.

Belajar dan bekerja sambil mendengarkan musik adalah kebiasaannya. Ketertarikan pada dunia pendidikan muncul setelah menamatkan sarjana, sehingga berharap dapat berkontribusi pada masyarakat melalui pendidikan.

Buku pertama ini diharapkan dapat menjadi pemacu untuk menulis buku-buku berikutnya. Akhir kata, penulis ucapkan terima kasih kepada keluarga, teman, dan grup G2M2 sehingga buku ini bisa terbit.

*****