PENGANTAR METODE NUMERIK

NI KADEK RINI PURWATI, S.Si., M.Pd.

NI KETUT ERAWATI, S.Si., M.Pd.

KLIK MEDIA

PENGANTAR METODE NUMERIK

NI KADEK RINI PURWATI, S.Si., M.Pd.

NI KETUT ERAWATI, S.Si., M.Pd.

Diterbitkan oleh:

KLIK MEDIA

Jl. Bromo 302 RT 01 RW 03 Kebon Agung
Sukodono-Lumajang-Jawa Timur

Desain cover : Sendy

Editor : Teddy Fiktorius

Layouter : Ainunrh

Terbit : Oktober 2020

ISBN : 978-623-95006-6-5

Kata Pengantar

Pendiri G2M2

(fiktoriusteddy@gmail.com - 0852 4592 1881)

SALAM HEBAT!

Salam yang paling tepat untuk menyambut hadirnya buku "**PENGANTAR METODE NUMERIK**".

Andai saja rimba adalah pena dan samudra adalah tinta, pun tak akan cukup bagi kita untuk menuliskan betapa bersyukur-nya kita masih dilimpahkan rahmat-Nya sehingga dapat berkarya dalam hidup ini. Buku ini merupakan karya nyata dari upaya penulis untuk mengukir namanya dalam peradaban ini. Ini lah insan yang senantiasa mengingat pesan almarhum Pramoedya Ananta Toer, penulis Indonesia.

"Orang boleh pandai setinggi langit, tapi selama ia tidak menulis, ia akan hilang di dalam masyarakat dan dari sejarah. Menulis adalah bekerja untuk keabadian."

Merupakan suatu kehormatan bagi saya untuk menjadi narasumber sekaligus pengisi lembar kata pengantar pada buku ini yang merupakan produk akhir dari sesi pendampingan penulisan naskah buku Gerakan Guru Membaca dan Menulis (G2M2) pada Workshop Nasional Daring dengan tema "Pendidik Matematika Profesional" yang diselenggarakan oleh Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Mahadewa Indonesia pada tanggal 5 September 2020 sampai dengan 7 Oktober 2020.

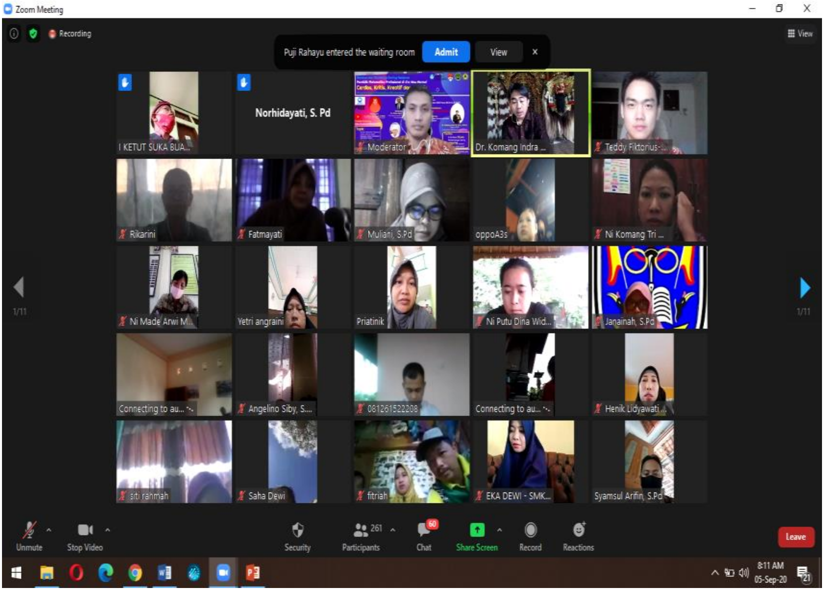
Teruntuk para pembaca yang budiman, selamat berliterasi ria. Semoga 'Baca! Baca! Dan baca!' menjadi slogan aktivitas intelektual Anda semua.

Teruntuk penulis, teruslah berkarya. Jadilah garda terdepan untuk menjaga obor literasi tetap menyala agar keberlangsungan peradaban kita tetap terjamin. Ingatlah senantiasa moto komunitas G2M2, **"Siang dan malam akan berlalu; namun tidak dengan tulisanku"**.

Pontianak, Oktober 2020

Teddy Fiktorius, M.Pd.

Suasana Workshop Nasional Daring dengan tema “Pendidik Matematika Profesional” yang diselenggarakan oleh Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Mahadewa Indonesia pada tanggal 5 September 2020


Zoom Meeting
Recording
Puji Rahayu entered the waiting room
Admit
View
I KETUT SUKA BUA...
Norhidayati, S. Pd
Moderator
Dr. Komang Indra ...
Teddy Fiktorius-...
Rikarini
Fatmayati
Muliani, S.Pd
oppoA3s
Ni Komang Tri ...
Ni Made Arwi M...
Yetri angraini
Priatinik
Ni Putu Dina Wid...
Janainah, S.Pd
Connecting to au...
Angelino Siby, S....
081261522208
Henik Lidyawati...
siti rahmah
Saha Dewi
fitriah
EKA DEWI - SMK...
Syamsul Arifin, S.Pd
1/11
Unmute
Stop Video
Security
Participants
Chat
Share Screen
Record
Reactions
Leave
8:11 AM
05-Sep-20


Zoom Meeting
Recording
2 people entered the waiting room
View
PRATINIK
Teddy Fiktorius-...
SRI RUSMILAWAT...
LASYEM, S.Pd.SD
iin rusma
Michrun Nisa Ra...
081376256257
Ni Nengah Nani...
Khamisah
Alirman Yusuf
Ni Made Ita Susil...
Jariatunnida, S.Pd
Ni Nyoman Ayu ...
ZURADAH
NURDIONO S.Pd
I Made Suarta
R. Y. Hendriyathi,...
Yuni Haryanti, S.Pd
Syarifah nur safi...
Wida Siska
OPPO A1k
Hp
Siti Komariyah S...
Mutia Salimatun ...
Yetri angraini
2/11
Unmute
Stop Video
Security
Participants
Chat
Share Screen
Record
Reactions
Leave
8:13 AM
05-Sep-20

Sekapur Sirih

Rektor Universitas Mahadewa Indonesia

"Aku melintasi kehidupan dan kala. Aku berlayar menembus senja. Kuberanikan diri menulis untuk mengabadikan momen hidup dalam lembaran kertas."
~Iwan Setyawan-Penulis dari Indonesia~

UNESCO mempublikasi data statistik yang cukup mengejutkan pada tahun 2012. UNESCO menyebutkan bahwa indeks minat baca di Indonesia baru mencapai 0,001. Ini berarti bahwa dari setiap 1.000 penduduk Indonesia, hanya 1 orang saja yang memiliki minat baca! Kemudian, sebuah survei yang dilaksanakan oleh Central Connecticut State University pada tahun 2003 hingga 2004 menempatkan Indonesia pada peringkat 60 dari 61 negara terkait minat baca. Negara tercinta ini hanya unggul dari Botswana yang berada pada posisi buntut, yakni peringkat 61.

Meskipun pengertian literasi sudah berkembang pesat, aktivitas membaca dan menulis tetap tergolong pada literasi dasar yang perlu dikuasai oleh setiap individu untuk bertahan hidup. Membaca dipandang sebagai sebuah usaha untuk menggali ilmu. Ilmu tersebut seyogyanya perlu diikat dengan usaha literasi lainnya, yakni menulis. Penguatan budaya literasi adalah kunci untuk memajukan bangsa ini.

Suatu kebanggaan bagi saya untuk mengisi lembar sekapur sirih pada buku yang berjudul "**PENGANTAR METODE NUMERIK**" karya **NI KADEK RINI PURWATI, S.Si., M.Pd.** dan **NI KETUT ERAWATI, S.Si., M.Pd.**, dosen di Universitas Mahadewa Indonesia. Buku bahan ajar ini merupakan acuan dalam menguasai konsep teoretis matematika terkait materi metode numerik.

Kepada pendiri G2M2, Bapak Teddy Fiktorius, penghargaan setinggi-tingginya atas upaya dalam memotivasi dan menginspirasi para pendidik, baik guru maupun dosen, untuk menunaikan gerakan literasi secara nyata.

Kepada penulis, teruslah mengukir aksara. Jadilah ujung tombak dalam mengawal obor literasi tetap menyala sebagai bukti nyata kedigdayaan peradaban kita.

Kepada pembaca, selamat membaca, merenung, dan pada akhirnya menuangkan gagasan-gagasan baru dalam budaya literasi menulis secara nyata.

Bali, Oktober 2020

Dr. I Made Suarta, S.H., M.Hum.

Prakata

Puji syukur kehadapan Tuhan Yang Maha Esa, karena atas berkat dan rahmat-Nya penulis dapat menyelesaikan penyusunan buku ajar Pengantar Metode Numerik. Buku ajar ini merupakan salah satu luaran Hibah Penelitian Dosen Pemula Tahun 2019 dengan judul "Pengembangan Buku Ajar Metode Numerik Berbasis Pembelajaran Kolaboratif".

Pada kesempatan ini, penulis megucapkan terima kasih yang sedalam-dalamnya kepada DRPM Risbang Ristekdikti yang telah menyelenggarakan program Hibah Penelitian Dosen Pemula, serta memberikan dukungan berupa dana penelitian. Selain itu, ucapan terima kasih juga penulis sampaikan kepada rekan-rekan di Universitas Mahadewa Indonesia khususnya Program Studi Pendidikan Matematika yang telah mendukung terlaksananya penelitian ini.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa buku ajar ini masih jauh dari sempurna baik isi maupun bentuknya. Hal ini disebabkan karena kemampuan dan pengalaman penulis masih terbatas, sehingga penulis akan menerima dengan senang hati segala kritik dan saran dari pembaca demi lebih sempurnanya buku ajar ini.

Denpasar, Oktober 2020

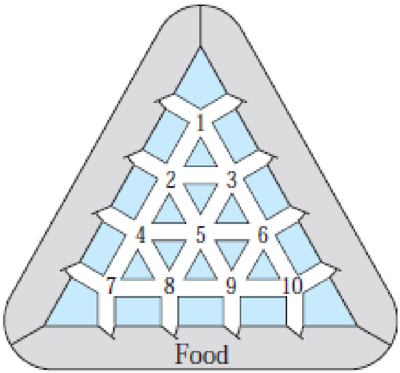
Ni Kadek Rini Purwati

Ni Ketut Erawati

Daftar Isi

Masalah nyata dalam kehidupan sehari-hari dapat disusun dalam bentuk model matematika untuk mempermudah pencarian solusi. Berikut ini disajikan contoh permasalahan yang dapat dimodelkan secara matematis.

Perhatikan gambar berikut!



Gambar 1. Labirin Tikus

(Sumber: Larson, 2009)

Gambar 1 adalah suatu labirin tikus yang berisi koridor makanan. Misalkan seekor tikus dimasukkan ke dalam labirin, berapakah peluang bahwa tikus akan muncul di koridor makanan jika dimulai dari persimpangan ke-i? Permasalahan ini diselesaikan dengan terlebih dahulu melakukan pemodelan matematika, dimana dimisalkan peluang menang (mendapatkan makanan) dimulai di persimpangan yang diwakili oleh p_i. Kemudian kita membentuk persamaan linier yang melibatkan p_i dan peluang terkait dengan persimpangan yang berbatasan dengan persimpangan ke-i. Misalnya, di persimpangan pertama tikus memiliki peluang ¼ memilih jalan ke kanan atas dan gagal, peluang ¼ memilih jalan ke kiri atas dan gagal, peluang ¼ memilih jalan ke kanan bawah (dimana titik itu memiliki peluang p_3 menang), dan peluang ¼ memilih jalan ke kiri bawah (dimana titik itu memiliki peluang p_2 menang). Berdasarkan penalaran yang sama, diperoleh 10 peluang yang ditunjukkan dalam sistem persamaan berikut:

$$p_1 = \frac{1}{4}(0) + \frac{1}{4}(0) + \frac{1}{4}p_2 + \frac{1}{4}p_3$$
$$p_2 = \frac{1}{5}(0) + \frac{1}{5}p_1 + \frac{1}{5}p_3 + \frac{1}{5}p_4 + \frac{1}{5}p_5$$
$$p_{10} = \frac{1}{4}(0) + \frac{1}{4}(1) + \frac{1}{4}p_6 + \frac{1}{4}p_9$$

Sistem persamaan tersebut merupakan model matematika dari permasalahn labirin.

Penentuan solusi dari suatu model matematika dapat dilakukan secara analitik atau numerik. Penyelesaian secara analitik menggunakan metode analitik dalam menghasilkan solusi dan umumnya metode ini dilakukan pada model yang sederhana. Solusi yang dihasilkan pada metode analitik adalah solusi eksak (solusi sebenarnya). Penyelesaian secara numerik menggunakan metode numerik dalam menghasilkan solusi dan umumnya dilakukan pada model yang lebih kompleks dengan persamaan berderajat tinggi dan tidak linier. Metode numerik adalah teknik untuk merumuskan permasalahan matematika agar dapat diselesaikan dengan operasi aritmatika, dimana solusi yang diperoleh melalui metode ini berupa solusi hampiran (aproksimasi). Salah satu contoh permasalahan yang dapat diselesaikan secara numerik adalah permasalah labirin tikus diatas, dimana permasalahan tersebut menghasilkan model matematika berupa sistem persamaan yang besar. Beberapa permasalah yang dapat diselesaikan menggunakan metode numerik, yaitu:

- ✓ Mencari akar-akar persamaan
- ✓ Menyelesaikan persamaan non linier
- ✓ Menyelesaikan persamaan simultan
- ✓ Menyelesaikan diferensial dan integral
- ✓ Mencari suatu nilai di antara titik data yang diketahui (interpolasi)
- ✓ Menyelesaikan persamaan diferensial

Metode numerik melibatkan banyak iterasi untuk memperoleh nilai hampiran yang tepat, sehingga dalam implementasi metode ini perlu melibatkan alat komputasi berupa kalkulator atau komputer. Terdapat beragam program komputer yang dapat digunakan dalam menunjang implementasi metode numerik, misalnya Matlab, Maple, Mathematica, Microsoft Excel, dan lain-lain. Secara umum, langkah-langkah penyelesaian metode numerik adalah:

1) Identifikasi masalah
2) Memodelkan masalah secara matematis
3) Identifikasi metode numerik yang diperlukan untuk menyelesaikan masalah
4) Melakukan perhitungan sesuai langkah-langkah metode (implementasi metode)
5) Analisis hasil akhir dan simpulan

BAB 1
GALAT (*ERROR*)

Tujuan:
Mahasiswa mampu menguasai konsep teoretis mengenai galat/*error*.

"Don't worry about failure, you only have to be right once"
(Drew Houston-penemu Dropbox)

1.1 Definisi

Penyelesaian secara numerik dari suatu persamaan matematika merupakan nilai hampiran/ aproksimasi yang mendekati nilai eksak (nilai sebenarnya) dari penyelesaian analitik. Hal ini menandakan, dalam penyelesaian numerik tersebut terdapat galat (*error*) terhadap nilai eksak yang disebut dengan galat numerik. **Galat numerik** adalah besaran yang merupakan selisih antara nilai hampiran dengan nilai eksak.

1.2 Tipe Galat

Tipe galat dapat digolongkan dalam 3 tipe, yakni galat bawaan/*inherent error*, galat pembulatan/*round-of error*, dan galat pemotongan/ *truncation error* (Triatmodjo, 1992).

1) Galat Bawaan (*inherent error*)

Galat bawaan terjadi karena kekeliruan dalam menyalin data ataupun salah membaca skala. Galat ini juga dapat disebabkan karena penggunaan suatu metode numerik yang menghasilkan perhitungan numerik yang sebagian besar tidak eksak.

2) Galat pembulatan (*round-of error*)

Galat pembulatan terjadi karena tidak diperhitungkannya beberapa angka terakhir dari suatu bilangan. Sebagai contoh 3,1415926 dapat dibulatkan menjadi 3,14. Galat pembulatan juga dapat terjadi karena adanya kesalahan dalam pembulatan.

3) Galat pemotongan (*truncation error*)

Galat pemotongan terjadi karena tidak dilakukannya hitungan sesuai dengan prosedur matematis yang benar.

Contoh**.** Suatu fungsi dapat dipresentasikan dalam bentuk deret tak terhingga, misalkan:

$$\sin x = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$ dimana x dalam radian.

Persamaan ini terbentuk berdasarkan ekspansi deret Taylor, yakni:

$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \cdots +$ $f^n(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} + \cdots$dimana $x_0 = 0$ karena deret berpusat di titik nol.

Nilai eksak dari $\sin x$ diperoleh apabila semua suku dari deret tersebut diperhitungkan. Namun memperhitungkan semua suku sampai tak terhingga memerlukan proses yang panjang dan sulit, sehingga diperhitungkan beberapa suku pertama saja. Hal ini menyebabkan hasilnya tidak sama dengan nilai eksak dan memunculkan suatu galat pemotongan. Galat ini terjadi karena suatu proses tak terhingga diganti dengan proses hingga.

1.3 Jenis Galat

Jenis galat dapat dikelompokkan dalam 2 jenis, yakni galat mutlak dan galat relatif.

1. Galat mutlak (ε_s)

Galat mutlak adalah selisih numerik antara besar nilai eksak dengan nilai hampiran. Galat mutlak dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{\varepsilon_s = \text{nilai eksak} - \text{nilai hampiran}}$$

Perhitungan galat mutlak ini disajikan pada contoh berikut:

Misalkan sekelompok siswa melakukan pengukuran pada kawat dan pensil. Salah seorang anak memperoleh hasil pengukuran sebatang kawat adalah 99 cm, padahal panjang sebenarnya adalah 100 cm. Hasil pengukuran panjang kawat ini menghasilkan selisih nilai dengan panjang sebenarnya, yakni sebesar 1 cm. Di satu sisi, seorang anak yang mengukur panjang pensil memperoleh hasil bahwa panjang pensil adalah 9 cm, padahal panjang sebenarnya adalah 10 cm. Hasil pengukuran ini pun menghasilkan selisih nilai dengan panjang sebenarnya, yakni sebesar 1 cm.

Berdasarkan contoh tersebut terlihat bahwa terjadi galat pengukuran yang besarnya sama-sama 1 cm. Galat 1 cm pada pengkuran pensil lebih berarti daripada 1 cm pada pengukuran kawat. Akan tetapi jika tidak terdapat informasi panjang sebenarnya, maka galat pengukuran kawat dan pensil dianggap sama saja. Oleh karena itu, perhitungan galat mutlak ini memiliki kelemahan karena tidak menjelaskan seberapa besar galat jika dibandingkan dengan nilai sebenarnya. Dengan kata lain, perhitungan galat mutlak ini tidak memperhatikan tingkat besaran/satuan dari nilai yang diperiksa.

2. Galat Relatif (ε_t)

Perhitungan pada galat relatif dapat mengatasi kelemahan galat mutlak, yakni dengan menormalkan galat mutlak terhadap nilai eksak sehingga tingkat besaran dari nilai yang diperiksa dapat diperhitungkan. Galat relatif dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{\varepsilon_t} = \frac{\textbf{nilai eksak} - \textbf{nilai hampiran}}{\textbf{nilai eksak}}$$

Persentase galat relatif dirumuskan sebagai berikut:

$$\%\boldsymbol{\varepsilon_t} = \frac{\textbf{nilai eksak} - \textbf{nilai hampiran}}{\textbf{nilai eksak}} \times \mathbf{100}\%$$

Pada metode numerik, nilai eksak hanya akan diketahui jika fungsi yang ditangani dapat diselesaikan secara eksak. Oleh karena itu, alternatif untuk menormalkan galat mutlak adalah dengan menggunakan hampiran terbaik. Berikut adalah rumus alternatif dari galat relatif:

$$\boldsymbol{\varepsilon_t} = \frac{\textbf{nilai hampiran sekarang} - \textbf{nilai hampiran sebelumnya}}{\textbf{nilai hampiran sekarang}}$$

Hasil perhitungan pada galat dapat bernilai positif atau negatif. Jika nilai hampiran sebelumnya lebih besar dari nilai hampiran sekarang (nilai hampiran lebih besar dari nilai eksak), maka galatnya negatif, dan sebaliknya. Dalam metode numerik, umumnya disyaratkan $|\boldsymbol{\varepsilon_t}| < \boldsymbol{\varepsilon_s}$.

1.4 Contoh Perhitungan Galat

Hitung kesalahan yang terjadi dari nilai $\sin x$ dengan $x = 1{,}5708$, apabila hanya diperhitungkan 4 suku pertama dari deret

$$\sin x = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

dimana x dalam radian.

Diketahui bahwa nilai eksak $\sin 1{,}5708 = 1$.

Solusi.

- ✓ Nilai $\sin x$ dengan $x = 1{,}5708$:

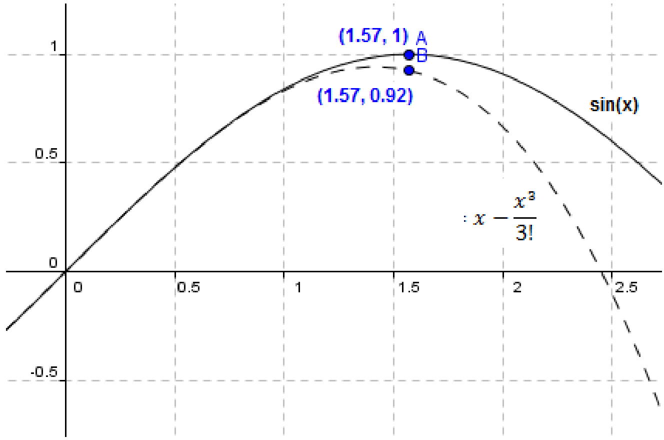
  $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} \leftrightarrow \sin 1{,}5708 = 1{,}5708 - \frac{(1{,}5708)^3}{3!} = 0{,}924831371$

- ✓ Kesalahan yang terjadi:

  $$\varepsilon_t = \frac{\text{nilai eksak} - \text{nilai hampiran}}{\text{nilai eksak}} \times 100\%$$

  $$\leftrightarrow \varepsilon_t = \frac{1 - 0{,}924831371}{1} \times 100\% = 7{,}516863\%$$

✓ Ilustrasi:



Gambar 1.1 Perkiraan Nilai Fungsi sin *x*

Gambar 1.1 memberikan ilustrasi mengenai posisi nilai eksak (titik A) dan nilai hampiran (titik B) dengan galat sebasar 7,516863%

RANGKUMAN

1. Galat numerik adalah besaran yang merupakan selisih antara nilai hampiran dengan nilai eksak.
2. Tipe-tipe galat, yakni:
    a. Galat Bawaan (*inherent error*), yakni galat yang terjadi karena kekeliruan dalam menyalin data, salah membaca skala, dan penggunaan suatu metode numerik yang menghasilkan perhitungan numerik yang sebagian besar tidak eksak.
    b. Galat pembulatan (*round-of error*), yakni galat yang terjadi karena tidak diperhitungkannya beberapa angka terakhir dari suatu bilangan.
    c. Galat pemotongan (*truncation error*), yakni galat yang terjadi karena tidak dilakukannya hitungan sesuai dengan prosedur matematis yang benar.
3. Jenis-jenis galat, yakni:
    a. Galat mutlak (ε_s), yakni selisih numerik antara besar nilai sebenarnya dengan nilai hampiran. Rumus galat mutlak adalah $\varepsilon_s =$ nilai eksak

b. Galat Relatif (ε_t), yakni perhitungan galat dengan menormalkan galat mutlak terhadap nilai eksak sehingga tingkat besaran dari nilai yang diperiksa dapat diperhitungkan. Rumus galat relatif adalah

$$\varepsilon_t = \frac{\text{nilai eksak} - \text{nilai hampiran}}{\text{nilai eksak}} \text{ atau}$$

$$\varepsilon_t = \frac{\text{nilai hampiran sekarang} - \text{nilai hampiran sebelumnya}}{\text{nilai hampiran sekarang}}$$

Persentase galat relatif adalah $\%\varepsilon_t = \frac{\text{nilai eksak} - \text{nilai hampiran}}{\text{nilai eksak}} \times 100\%$

Dalam metode numerik, umumnya disyaratkan $|\varepsilon_t| < \varepsilon_s$.

LATIHAN

1. Diketahui $x = \frac{22}{7} \approx 3{,}14159265 \ldots$ dan $y = \frac{7}{22} \approx 0{,}31818181 \ldots$
   Tentukan nilai eksak dan nilai hampiran dari $x - y$.

2. Misalkan $a =$ nilai eksak. Tentukan galat mutlak dan galat relatif dari nilai berikut:
   a. $a = \frac{1}{9}, a^* = 0{,}111$
   b. $a = \frac{22}{7}, a^* = \frac{314}{100}$

3. Tuliskan ekspansi deret Taylor untuk fungsi $\cos x$. Kemudian hitung kesalahan yang terjadi dari nilai $\cos x$ dengan $x = 1{,}0472$ (x dalam radian), apabila hanya diperhitungkan 4 suku pertama dari deret Taylor.

BAB 2
SOLUSI PERSAMAAN NON-LINIER

Tujuan:
- Mahasiswa mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, dan sistematis dalam memahami konsep teoretis metode numerik yang terkait dengan penentuan solusi persamaan non-linier.
- Mahasiswa menunjukkan kinerja mandiri dan rasa tanggung jawab dalam menerapkan konsep teoretis metode numerik dalam menyelesaikan soal yang terkait dengan penentuan solusi persamaan non-linier.

"Indivudually, we are one drop. Together we are an ocean"
(Ryunosuke Satoro-Japan poet)

2.1 Pencarian Akar (Akar-Akar Persamaan)

Akar (pembuat nol) dari suatu fungsi adalah nilai-nilai dari variabel bebas yang membuat fungsi bernilai nol. Tentunya mudah untuk menentukan akar dari fungsi linier $f(x) = ax + b$. Untuk fungsi non-linier, akar dari fungsi dapat diselesaikan dengan beberapa metode analitik, misalnya memfaktorkan, melengkapi kuadarat, dan rumus *abc* yang dirumuskan dengan

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Metode-metode ini dapat diterapkan pada persamaan non-linier berderajat dua dengan bentuk $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Beberapa bentuk persamaan non-linier dengan derajat lebih dari dua dapat diselesaikan dengan menggunakan metode Horner. Namun, terkadang ditemukan kesulitan untuk mendapatkan akar dari fungsi non-linier dengan derajat lebih dari dua. Oleh karena itu, diperlukan suatu metode numerik untuk menghampiri nilai akar fungsi berderajat tinggi. Beberapa contoh bentuk fungsi non-linier dengan derajat lebih dari dua, yakni:

$$f(x) = 24x^7 - 12x^6 + 1{,}25x^4 + 5x^3 - 120x^2 - x + 100$$

$$f(x) = \sin x - x + 0{,}5$$

$$f(x) = \sin^2 x - x^2 - 1$$

Selanjutnya akan dibahas metode numerik yang dapat digunakan untuk mencari akar persamaan non-linier.

2.2 Metode Pencarian Akar

Metode pencarian akar pada metode numerik dikelompokkan menjadi dua, yakni: metode pengurung dan metode terbuka. Pada metode pengurung ini terdapat beberapa metode numerik, diantaranya adalah Metode Bagi Dua (*Bisection Method*) dan Metode Interpolasi Linier/Posisi Palsu (*False Position Method*). Sedangkan metode numerik yang tergolong dalam metode terbuka adalah Metode *Newton-Raphson* dan Metode Garis Potong (*Secant Method*).

1. Metode Pengurung

Tebakan akar dalam metode pengurung selalu berada "dalam kurung" atau berada pada kedua sisi dari nilai akar dan diperlukan dua tebakan awal untuk menentukan nilai hampiran akar persamaan. Metode pengurung ini memiliki keunggulan, yakni iterasi yang terjadi pasti konvergen (makin lama makin mendekati nilai sebenarnya). Akan tetapi hal ini juga menimbulkan adanya kelemahan, yakni kekonvergenan terjadi dalam proses iterasi relatif lambat.

Kekonvergenan pada metode pengurung pasti terjadi dikarenakan metode ini didasari oleh suatu teorema yang dapat menjadi filter dalam penentuan tebakan awal, sehingga tebakan awal tidak sembarangan ditentukan. Teorema yang dimaksud adalah:

Diketahui $\boldsymbol{f}: [\boldsymbol{x_a}, \boldsymbol{x_b}] \rightarrow \mathbb{R}$ adalah kontinu,

dimana $\boldsymbol{x_a}, \boldsymbol{x_b} \in \mathbb{R}$dan $\boldsymbol{x_a} < \boldsymbol{x_b}$.

Jika $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_a}).\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_b}) < 0$,

maka terdapat $\boldsymbol{x_c} \in (\boldsymbol{x_a}, \boldsymbol{x_b})$

sedemikian sehingga $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_c}) = \mathbf{0}$

Teorema ini bermakna bahwa suatu persamaan $f(x) = 0$ dimana $f(x)$ adalah fungsi kontinu riil, memiliki paling sedikit satu akar persamaan diantara x_a dan x_b jika $f(x_a).f(x_b) < 0$ (Kaw, 2011).

2. Metode Terbuka

Pada metode terbuka, pencarian nilai hampiran akar persamaan dimulai dari suatu nilai tunggal variabel bebas, atau dua nilai yang tidak perlu mengurung akar. Kondisi ini menimbulkan adanya kelemahan dalam metode terbuka, yakni iterasi yang terjadi tidak selalu konvergen. Hal ini dikarenakan pada metode terbuka tidak terdapat aturan yang menjadi filter dalam menentukan tebakan awal (tebakan awal ditentukan sembarang). Akan tetapi jika tebakan awal yang dipilih tepat, maka iterasi yang terjadi pada metode terbuka akan konvergen dan konvergensinya terjadi lebih cepat daripada metode pengurung.

2.3 Metode Grafik

Metode sederhana yang dapat digunakan untuk menentukan nilai hampiran akar adalah dengan menggunakan metode grafik. Metode grafik dapat digunakan untuk memperoleh tebakan awal maupun pencarian akar persamaan jika grafik fungsinya dapat digambarkan dengan mudah. Akan tetapi metode ini memiliki kelemahan, yakni tebakan awal kurang akurat dikarenakan tebakan berbeda oleh setiap orang.

Ada dua metode grafik yang dapat dilakukan untuk mendapatkan tebakan awal dari akar persamaan $f(x) = 0$, yakni:

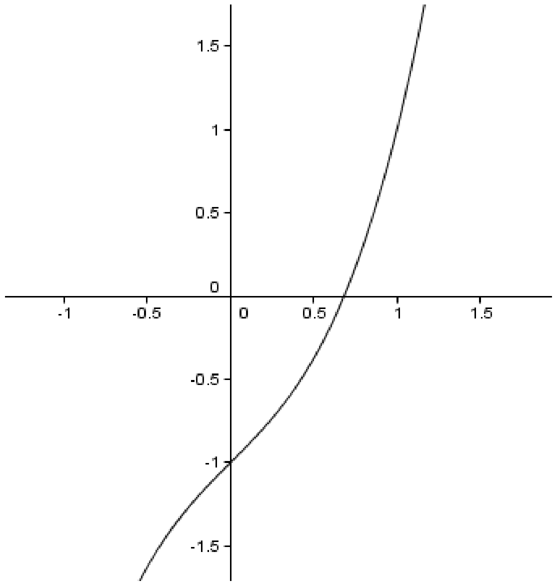
a) Metode Grafik Tunggal

Pada metode grafik tunggal, tebakan awal dipilih yang dekat dengan absis (sumbu X) dari titik perpotongan atau akar persamaan $f(x) = 0$.

Contoh:

Tentukan lokasi akar dan tebakan awal untuk akar persamaan fungsi $f(x) = x^3 + x - 1$

Solusi:



Gambar 2.1 Grafik fungsi $f(x) = x^3 + x - 1$

Berdasarkan gambar 2.1 terlihat bahwa titik potong dengan absis terjadi pada interval [0,5,1], sehingga tebakan awal untuk akar persamaan $f(x) = x^3 + x - 1$ dapat dipilih beberapa titik yang cukup dekat dengan interval tersebut.

b) Metode Grafik Ganda

Metode grafik ganda digunakan untuk persamaan fungsi $f(x) = 0$ yang penjabaran fungsinya dapat didekomposisi menjadi pengurangan dua buah fungsi, yaitu $f(x) = f_1(x) - f_2(x) = 0$. Pada metode ini, tebakan awal dipilih cukup dekat dengan absis titik perpotongan kedua fungsi yaitu $f_1(x)$ dan $f_2(x)$.

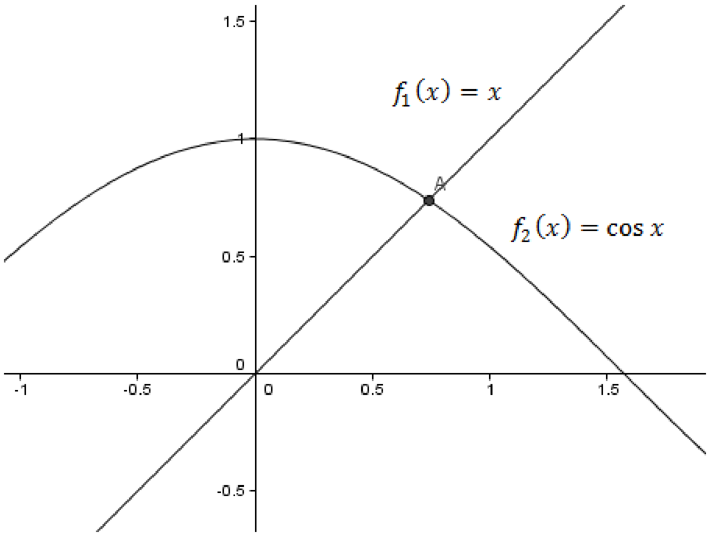
Contoh:

Tentukan lokasi akar dan tebakan awal untuk akar persamaan fungsi $f(x) = x - \cos x$

Solusi:

Fungsi $f(x) = x - \cos x$ dapat didekomposisi menjadi pengurangan dua buah fungsi, yaitu $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ dengan $f_1(x) = x$ dan $f_2(x) = \cos x$

Fungsi ini dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.2 Grafik fungsi $f_1(x) = x$ dan $f_2(x) = \cos x$

Berdasarkan gambar 2.2 terlihat bahwa fungsi $f_1(x)$ dan $f_2(x)$ saling berpotongan di titik A. Nilai absisnya merupakan perkiraan akar dari fungsi $f(x) = x - \cos x$, di mana perkiraan akar berada pada interval [0,5,1].

2.4 Metode Bagi Dua (*Bisection Method*)

Metode bisection mengasumsikan bahwa fungsi $f(x)$ bernilai riil dan kontinu pada interval $[x_a, x_b]$ serta $f(x_a)$ dan $f(x_b)$ berlawanan tanda, artinya $f(x_a).f(x_b) < 0$. Karena asumsi tersebut maka kemungkinan terdapat minimal satu akar pada interval $[x_a, x_b]$. Terdapat beberapa kemungkinan lainnya, yakni:

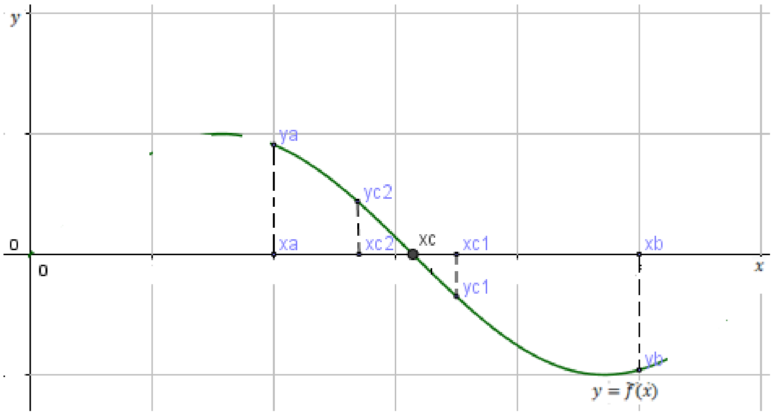
a) Jika $f(x_a).f(x_b) < 0$, kemungkinan akar (x_c) di dalam interval $[x_a, x_b]$

b) Jika $f(x_a).f(x_b) > 0$, kemungkinan akar (x_c) di luar interval $[x_a, x_b]$

Pada metode bisection, nilai x_a, x_b, x_c menunjukkan akar sedangkan $f(x_a), f(x_b), f(x_c)$ menentukan posisi akar. Dalam hal ini nilai x_a dan $x_b$adalah terkaan awal yang cukup dekat dengan akar (gunakan interval $[x_a, x_b]$ sekecil mungkin), sehingga konsep penting yang perlu diperhatikan dalam metode bisection adalah mencari akar diantara x_a dan x_b sehingga nilai $f(x)$ mendekati/ sama dengan 0.

Ide metode bisection adalah interval selalu dibagi dua sama lebar. Jika fungsi berubah tanda sepanjang suatu subinterval, maka letak akarnya kemudian ditentukan ada di tengah-tengah subinterval.

Illustrasi:



Gambar 2.3 Metode Bisection

Keterangan gambar:

Nilai x_a dan x_b adalah nilai hampiran awal
Nilai x_c adalah nilai hampiran baru yang tepat berada diantara x_a dan x_b
Nilai x_{c1} adalah nilai hampiran iterasi 1
Nilai x_{c2} adalah nilai hampiran iterasi 2

Berdasarkan Gambar 2.3, dapat dijabarkan langkah-langkah metode bisection, yakni:

1. Pilih x_a dan x_b sebagai nilai hampiran awal. Kemudian periksa apakah benar $f(x_a).f(x_b) < 0$
2. Cari nilai hampiran baru (x_c) dengan rumus:

$$\boldsymbol{x_c = \frac{x_a + x_b}{2}}$$

   Rumus tersebut didasarkan ide dari metode bisection, yakni x_c tepat berada diantara x_a dan x_b.
3. Lakukan evaluasi untuk menentukan pada interval mana akar berada dengan menggunakan kriteria berikut:
   a) Jika $f(x_a).f(x_c) < 0$: akar berada pada bagian interval bawah, maka $x_b = x_c$ dan kembali ke langkah 2. Pada kondisi ini akar di daerah interval x_a dan x_c.
   b) Jika $f(x_a).f(x_c) > 0$: akar berada pada bagian interval atas, maka $x_a = x_c$ dan kembali ke langkah 2. Pada kondisi ini akar di daerah interval x_b dan x_c
   c) Jika $f(x_a).f(x_c) = 0$: akar setara dengan x_c, hentikan perhitungan.

Terdapat beberapa kriteria penghentian iterasi, diantaranya:

1. Jika galat relatif (ε_t) sudah lebih kecil dari toleransi (ε) yang diberikan:

$$|\varepsilon_t| = \left|\frac{x_{c_{baru}} - x_{c_{lama}}}{x_{c_{baru}}}\right| < \varepsilon$$

2. Jika iterasi sudah mencapai iterasi maksimal: $n_{maks} = N$
3. Jika nilai fungsi hampirannya sudah lebih kecil dari toleransi yang diberikan: $|f(x_c)| < \varepsilon$

Contoh 1:

1) Carilah salah solusi dari persamaan: $x^2 - 3 = 0$ dengan solusi analitik!
   Solusi:
   $x^2 - 3 = 0 \leftrightarrow x^2 = 3$
   $\leftrightarrow x = \pm\sqrt{3} = \pm 1{,}732051$
   Berdasarkan solusi analitik diperoleh akar persamaan adalah 1,732051 yang merupakan nilai eksak.

2) Carilah salah solusi dari persamaan: $x^2 - 3 = 0$ dengan metode bisection pada interval [1,2] dengan 5 iterasi!
   Solusi:

   Iterasi 0 (Perhitungan awal).
   - ✓ Diketahui $f(x) = x^2 - 3$ dengan $x_a = 1$ dan $x_b = 2$, sehingga diperoleh:
     $f(x_a) = {x_a}^2 - 3 = 1^2 - 3 = -2$
     $f(x_b) = {x_b}^2 - 3 = 2^2 - 3 = 1$
     dimana$f(x_a).\, f(x_b) < \; 0$

- ✓ Penentuan nilai hampiran baru (x_c) , yakni:
  $x_c = \frac{x_a+x_b}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$
  dengan $f(x_c) = {x_c}^2 - 3 = (1,5)^2 - 3 = -0,75$
- ✓ Penentuan interval baru, yakni:
  $f(x_a).f(x_c) = -2 \times -0,75 = 1,5 > 0$, maka $x_a = x_c$
  Diperoleh interval baru, yakni [1,5,2] dimana $x_a = 1,5$ dan $x_b = 2$
- ✓ Penentuan galat, yakni:
  Diketahui bahwa solusi eksak dari persamaan: $x^2 - 3 = 0$ adalah 1,732051, maka galat ditentukan sebagai berikut:
  $|\varepsilon_t| = \left|\frac{\text{nilai eksak}-\text{nilai hampiran}}{\text{nilai eksak}}\right| =$

  $\left|\frac{1,732051-1,5}{1,732051}\right| = 0,133975$

Iterasi 1 (Pengulangan perhitungan pertama).

- ✓ Diketahui interval baru [1,5,2] dimana $x_a = 1,5$ dan $x_b = 2$ dengan
  $f(x_a) = {x_a}^2 - 3 = (1,5)^2 - 3 = -0,75$
  $f(x_b) = {x_b}^2 - 3 = 2^2 - 3 = 1$
  dimana $f(x_a).f(x_b) < 0$
- ✓ Penentuan nilai hampiran baru (x_c) , yakni:
  $x_c = \frac{x_a+x_b}{2} = \frac{1,5+2}{2} = 1,75$
  dengan $f(x_c) = {x_c}^2 - 3 = (1,75)^2 - 3 = 0,0625$

- ✓ Penentuan interval baru, yakni:
  $f(x_a).f(x_c) = -0{,}75 \times 0{,}0625 = -0{,}04688 < 0$, maka $x_b = x_c$
  Diperoleh interval baru, yakni [1,5,1,75] dimana $x_a = 1{,}5$ dan $x_b = 1{,}75$

- ✓ Penentuan galat, yakni:
  $|\varepsilon_t| = \left|\frac{\text{nilai eksak} - \text{nilai hampiran}}{\text{nilai eksak}}\right| =$

$\left|\frac{1{,}732051 - 1{,}75}{1{,}732051}\right| = 0{,}010363$

Langkah-langkah yang sama dilakukan untuk iterasi 2 hingga iterasi 5, sehingga diperoleh hasil iterasi sebagai berikut:

n	x_a	x_b	x_c	$f(x_a)$	$f(x_b)$	$f(x_c)$	$f(x_a).f(x$	$\|\varepsilon_t\|$
0	1	2	1,5	-2	1	-0,75	1,5	0,133975
1	1,5	2	1,75	-0,75	1	0,0625	-0,04688	0,010363
2	1,5	1,75	1,625	-0,75	0,0625	-0,35938	0,269531	0,061806
3	1,625	1,75	1,6875	-0,35938	0,0625	-0,15234	0,054749	0,025722
4	1,6875	1,75	1,71875	-0,15234	0,0625	-0,0459	0,006992	0,007679
5	1,71875	1,75	1,734375	-0,0459	0,0625	0,008057	-0,00037	0,001342

Berdasarkan tabel hasil iterasi diperoleh akar persamaan adalah 1,734375 dengan galat relatif0,001342.

3) Carilah salah solusi dari persamaan: $x^2 - 3 = 0$ dengan metode bisection pada interval [1,2] dengan toleransi 0,0001!

Solusi:

Iterasi 0 (Perhitungan awal).

✓ Diketahui $f(x) = x^2 - 3$ dengan $x_a = 1$ dan $x_b = 2$, sehingga diperoleh:
$f(x_a) = {x_a}^2 - 3 = 1^2 - 3 = -2$
$f(x_b) = {x_b}^2 - 3 = 2^2 - 3 = 1$
dimana$f(x_a). f(x_b) < 0$

✓ Penentuan nilai hampiran baru (x_c) , yakni:
$x_c = \frac{x_a+x_b}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$
dengan$f(x_c) = {x_c}^2 - 3 = (1{,}5)^2 - 3 = -0{,}75$

✓ Penentuan interval baru, yakni:
$f(x_a). f(x_c) = -2 \times -0{,}75 = 1{,}5 > 0$, maka $x_a = x_c$
Diperoleh interval baru, yakni [1,5,2] dimana $x_a = 1{,}5$ dan $x_b = 2$

✓ Penentuan galat, yakni:

Diketahui bahwa solusi eksak dari persamaan: $x^2 - 3 = 0$ adalah 1,732051, maka galat ditentukan sebagai berikut:

$|\varepsilon_t| = \left|\frac{\text{nilai eksak} - \text{nilai hampiran}}{\text{nilai eksak}}\right| = \left|\frac{1{,}732051 - 1{,}5}{1{,}732051}\right| = 0{,}133975$

Diperoleh bahwa galat lebih besar dari toleransi, yakni $0{,}133975 > 0{,}0001$ sehingga dilakukan pengulangan perhitungan (dilanjutkan ke iterasi 1).

Iterasi 1 (Pengulangan perhitungan pertama).

✓ Diketahui interval baru [1,5,2] dimana $x_a = 1{,}5$ dan $x_b = 2$ dengan
$f(x_a) = {x_a}^2 - 3 = (1{,}5)^2 - 3 = -0{,}75$
$f(x_b) = {x_b}^2 - 3 = 2^2 - 3 = 1$
dimana$f(x_a).f(x_b) < 0$

✓ Penentuan nilai hampiran baru (x_c) , yakni:
$x_c = \frac{x_a + x_b}{2} = \frac{1{,}5+2}{2} = 1{,}75$
dengan $f(x_c) = {x_c}^2 - 3 = (1{,}75)^2 - 3 = 0{,}0625$

✓ Penentuan interval baru, yakni:
$f(x_a).f(x_c) = -0{,}75 \times 0{,}0625 = -0{,}04688 < 0$, maka $x_b = x_c$

Diperoleh interval baru, yakni [1,5,1,75] dimana $x_a = 1{,}5$ dan $x_b = 1{,}75$

✓ Penentuan galat, yakni:

$|\varepsilon_t| = \left|\frac{\text{nilai eksak} - \text{nilai hampiran}}{\text{nilai eksak}}\right| =$
$\left|\frac{1{,}732051 - 1{,}75}{1{,}732051}\right| = 0{,}010363$

Diperoleh bahwa galat lebih besar dari toleransi, yakni $0{,}010363 > 0{,}000$ sehingga dilanjutkan ke iterasi 2.

Langkah-langkah yang sama dilakukan untuk iterasi 2 dan iterasi selanjutnya hingga diperoleh galat lebih kecil dari toleransi, sehingga diperoleh hasil iterasi sebagai berikut:

n	x_a	x_b	x_c	$f(x_a)$	$f(x_b)$	$f(x_c)$	$f(x_a).f(x_c)$	$\lvert\varepsilon_t\rvert$	***tol***
0	1	2	1,5	-2	1	-0,75	1,5	0,133975	
1	1,5	2	1,75	-0,75	1	0,0625	-0,04688	0,010363	0,0001
2	1,5	1,75	1,625	-0,75	0,0625	-0,35938	0,269531	0,061806	0,0001
3	1,625	1,75	1,6875	-0,35938	0,0625	-0,15234	0,054749	0,025722	0,0001
4	1,6875	1,75	1,71875	-0,15234	0,0625	-0,0459	0,006992	0,007679	0,0001
5	1,71875	1,75	1,734375	-0,0459	0,0625	0,008057	-0,00037	0,001342	0,0001
6	1,71875	1,734375	1,726563	-0,0459	0,008057	-0,01898	0,000871	0,003169	0,0001
7	1,726563	1,734375	1,730469	-0,01898	0,008057	-0,00548	0,000104	0,000914	0,0001
8	1,730469	1,734375	1,732422	-0,00548	0,008057	0,001286	-7E-06	0,000214	0,0001
9	1,730469	1,732422	1,731445	-0,00548	0,001286	-0,0021	1,15E-05	0,00035	0,0001
10	1,731445	1,732422	1,731934	-0,0021	0,001286	-0,00041	8,51E-07	6,78E-05	0,0001

Berdasarkan tabel hasil iterasi diperoleh akar persamaan adalah 1,731934 pada iterasi ke-10 karena nilai galat relatif sudah lebih kecil dari toleransi yang diberikan, sehingga iterasi dihentikan.

Berdasarkan hasil pada no 1), 2), dan 3) diperoleh nilai eksak 1,732051, sedangkan dengan metode bisection yang menggunakan 5 iterasi diperoleh hasil 1,734375 dan dengan menggunakan toleransi 0,0001 diperoleh hasil 1,731934. Terlihat bahwa terdapat sedikit perbedaan hasil antara solusi analitik dengan solusi numerik. Perbedaan inilah yang disebut dengan galat *(error)*. Terlihat juga bahwa hasil dengan metode bisection yang menggunakan 5 iterasi dengan yang menggunakan toleransi 0,0001 terdapat perbedaan, dimana hasil yang menggunakan toleransi lebih mendekati solusi eksak. Dalam hal ini **toleransi** adalah batas kesalahan yang boleh dilakukan dalam menyelesaikan suatu metode numerik, sehingga disyaratkan: **galat relatif** $< \ toleransi \ = |\boldsymbol{\varepsilon_t}| < \boldsymbol{\varepsilon_s}$

Contoh 2:

1) Carilah salah satu akar dari persamaan: $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ pada interval $[1,2]$ dengan 10 iterasi!

   Solusi:

   Iterasi 0 (Perhitungan awal).

- ✓ Diketahui $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ dengan $x_a = 1$ dan $x_b = 2$, sehingga diperoleh:
  $f(x_a) = {x_a}^3 + 4{x_a}^2 - 10 = 1^3 + 4(1^2) - 10 = -5$
  $f(x_b) = {x_b}^3 + 4{x_b}^2 - 10 = 2^3 + 4(2^2) - 10 = 14$
  dimana $f(x_a).f(x_b) < 0$
- ✓ Penentuan nilai hampiran baru (x_c) , yakni:
  $x_c = \frac{x_a+x_b}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$
  dengan $f(x_c) = {x_c}^3 + 4{x_c}^2 - 10 = (1{,}5)^3 + 4(1{,}5^2) - 10 = 2{,}375$
- ✓ Penentuan interval baru, yakni:
  $f(x_a).f(x_c) = -5 \times 2{,}375 = -11{,}875 < 0$, maka $x_b = x_c$
  Diperoleh interval baru, yakni [1,1,5] dimana $x_a = 1$ dan $x_b = 1{,}5$
- ✓ Penentuan galat, yakni:
  Pada perhitungan awal ini tidak diketahui solusi eksak dari persamaan $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ dan tidak diketahui juga nilai taksiran akar sebelumnya sehingga perhitungan galat belum dapat dilakukan. Karena $f(x_c) \neq 0$, maka akar belum setara dengan x_c sehingga perhitungan dilanjutkan ke iterasi 1.

Iterasi 1 (Pengulangan perhitungan pertama)

- ✓ Diketahui interval baru [1,1,5] dimana $x_a = 1$ dan $x_b = 1{,}5$ dengan
  $f(x_a) = {x_a}^3 + 4{x_a}^2 - 10 = 1^3 + 4(1^2) - 10 = -5$
  $f(x_b) = {x_b}^3 + 4{x_b}^2 - 10 = (1{,}5)^3 + 4(1{,}5^2) - 10 = 2{,}375$
  Dimana $f(x_a).f(x_b) < 0$
- ✓ Penentuan nilai hampiran baru (x_c) , yakni:
  $x_c = \frac{x_a + x_b}{2} = \frac{1+1{,}5}{2} = 1{,}25$
  dengan
  $f(x_c) = {x_c}^3 + 4{x_c}^2 - 10 = (1{,}25)^3 + 4(1{,}25^2) - 10 = -1{,}79688$

- ✓ Penentuan interval baru, yakni:
  $f(x_a).f(x_c) = -5 \times 0 - 1{,}79688 = 8{,}984375 > 0$, maka $x_a = x_c$
  Diperoleh interval baru, yakni [1,25,1,5] dimana $x_a = 1{,}25$ dan $x_b = 1{,}5$
- ✓ Penentuan galat, yakni:
  Pada perhitungan awal telah diperoleh nilai hampiran akar adalah 1,5 maka galat ditentukan sebagai berikut:

$|\varepsilon_t| =$

$\left|\frac{\text{nilai hampiran sekarang} - \text{nilai hampiran sebelumnya}}{\text{nilai hampiran sekarang}}\right| =$

$\left|\frac{1{,}25 - 1{,}5}{1{,}25}\right| = 0{,}2$

Langkah-langkah yang sama dilakukan untuk iterasi 2 hingga iterasi 10, sehingga diperoleh hasil iterasi sebagai berikut:

n	x_a	x_b	x_c	$f(x_a)$	$f(x_b)$	$f(x_c)$	$f(x_a).f(x_c)$	$\lvert\varepsilon_t\rvert$
0	1	2	1,5	-5	14	2,375	-11,875	
1	1	1,5	1,25	-5	2,375	-1,79688	8,984375	0,2
2	1,25	1,5	1,375	-1,79688	2,375	0,162109	-0,29129	0,090909
3	1,25	1,375	1,3125	-1,79688	0,162109	-0,84839	1,524448	0,047619
4	1,3125	1,375	1,34375	-0,84839	0,162109	-0,35098	0,29777	0,023256
5	1,34375	1,375	1,359375	-0,35098	0,162109	-0,09641	0,033838	0,011494
6	1,359375	1,375	1,367188	-0,09641	0,162109	0,032356	-0,00312	0,005714
7	1,359375	1,367188	1,363281	-0,09641	0,032356	-0,03215	0,0031	0,002865
8	1,363281	1,367188	1,365234	-0,03215	0,032356	7,2E-05	-2,3E-06	0,001431
9	1,363281	1,365234	1,364258	-0,03215	7,2E-05	-0,01605	0,000516	0,000716
10	1,364258	1,365234	1,364746	-0,01605	7,2E-05	-0,00799	0,000128	0,000358

Berdasarkan tabel hasil iterasi diperoleh akar persamaan adalah 1,364746 dengan galat relatif0,000358.

2) Carilah salah satu akar dari persamaan: $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ pada interval [1,2] dengan toleransi 0,0001!

Solusi:

Iterasi 0 (Perhitungan awal).

- ✓ Diketahui $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ dengan $x_a = 1$ dan $x_b = 2$, sehingga diperoleh:
  $f(x_a) = {x_a}^3 + 4{x_a}^2 - 10 = 1^3 + 4(1^2) - 10 = -5$
  $f(x_b) = {x_b}^3 + 4{x_b}^2 - 10 = 2^3 + 4(2^2) - 10 = 14$
  dimana $f(x_a).f(x_b) < 0$
- ✓ Penentuan nilai hampiran baru (x_c) , yakni:
  $x_c = \frac{x_a + x_b}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$
  dengan $f(x_c) = {x_c}^3 + 4{x_c}^2 - 10 = (1{,}5)^3 + 4(1{,}5^2) - 10 = 2{,}375$
- ✓ Penentuan interval baru, yakni:
  $f(x_a).f(x_c) = -5 \times 2{,}375 = -11{,}875 < 0$, maka $x_b = x_c$
  Diperoleh interval baru, yakni [1,1,5] dimana $x_a = 1$ dan $x_b = 1{,}5$
- ✓ Penentuan galat, yakni:
  Pada perhitungan awal ini tidak diketahui solusi eksak dari persamaan $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ dan tidak diketahui juga nilai hampiran akar sebelumnya sehingga perhitungan galat belum dapat dilakukan. Karena $f(x_c) \neq 0$, maka akar belum setara dengan x_c sehingga perhitungan dilanjutkan ke iterasi 1.

Iterasi 1 (Pengulangan perhitungan pertama)

- ✓ Diketahui interval baru [1,1,5] dimana $x_a = 1$ dan $x_b = 1{,}5$ dengan
$f(x_a) = {x_a}^3 + 4{x_a}^2 - 10 = 1^3 + 4(1^2) - 10 = -5$
$f(x_b) = {x_b}^3 + 4{x_b}^2 - 10 = (1{,}5)^3 + 4(1{,}5^2) - 10 = 2{,}375$
dimana $f(x_a).f(x_b) < 0$
- ✓ Penentuan nilai hampiran baru (x_c) , yakni:
$x_c = \frac{x_a+x_b}{2} = \frac{1+1{,}5}{2} = 1{,}25$
dengan $f(x_c) = {x_c}^3 + 4{x_c}^2 - 10 = (1{,}25)^3 + 4(1{,}25^2) - 10 = -1{,}79688$
- ✓ Penentuan interval baru, yakni:
$f(x_a).f(x_c) = -5 \times 0 - 1{,}79688 = 8{,}984375 > 0$, maka $x_a = x_c$
Diperoleh interval baru, yakni [1,25,1,5] dimana $x_a = 1{,}25$ dan $x_b = 1{,}5$
- ✓ Penentuan galat, yakni:
Pada perhitungan awal telah diperoleh nilai hampiran akar adalah 1,5 maka galat ditentukan sebagai berikut:
$|\varepsilon_t| = \left|\frac{\text{nilai hampiran sekarang} - \text{nilai hampiran sebelumnya}}{\text{nilai hampiran sekarang}}\right| = \left|\frac{1{,}25-1{,}5}{1{,}25}\right| = 0{,}2$

Diperoleh bahwa galat lebih besar dari toleransi, yakni $0{,}2 > 0{,}0001$ sehingga dilanjutkan ke iterasi 2.

Langkah-langkah yang sama dilakukan untuk iterasi 2 dan iterasi selanjutnya hingga diperoleh galat lebih kecil dari toleransi, sehingga diperoleh hasil iterasi sebagai berikut:

n	x_a	x_b	x_c	$f(x_a)$	$f(x_b)$	$f(x_c)$	$f(x_a).f(x_c)$	$\|\varepsilon_t\|$	**Tol.**
0	1	2	1,5	-5	14	2,375	-11,875		
1	1	1,5	1,25	-5	2,375	-1,79688	8,984375	0,2	0,0001
2	1,25	1,5	1,375	-1,79688	2,375	0,162109	-0,29129	0,090909	0,0001
3	1,25	1,375	1,3125	-1,79688	0,162109	-0,84839	1,524448	0,047619	0,0001
4	1,3125	1,375	1,34375	-0,84839	0,162109	-0,35098	0,29777	0,023256	0,0001
5	1,34375	1,375	1,359375	-0,35098	0,162109	-0,09641	0,033838	0,011494	0,0001
6	1,359375	1,375	1,367188	-0,09641	0,162109	0,032356	-0,00312	0,005714	0,0001
7	1,359375	1,367188	1,363281	-0,09641	0,032356	-0,03215	0,0031	0,002865	0,0001
8	1,363281	1,367188	1,365234	-0,03215	0,032356	7,2E-05	-2,3E-06	0,001431	0,0001
9	1,363281	1,365234	1,364258	-0,03215	7,2E-05	-0,01605	0,000516	0,000716	0,0001
10	1,364258	1,365234	1,364746	-0,01605	7,2E-05	-0,00799	0,000128	0,000358	0,0001
11	1,364746	1,365234	1,36499	-0,00799	7,2E-05	-0,00396	3,16E-05	0,000179	0,0001
12	1,36499	1,365234	**1,365112**	-0,00396	7,2E-05	-0,00194	7,7E-06	8,94E-05	0,0001

Berdasarkan tabel hasil iterasi diperoleh akar persamaan adalah 1,365112 karena nilai galat relatif sudah lebih kecil dari toleransi yang diberikan, sehingga iterasi dihentikan.

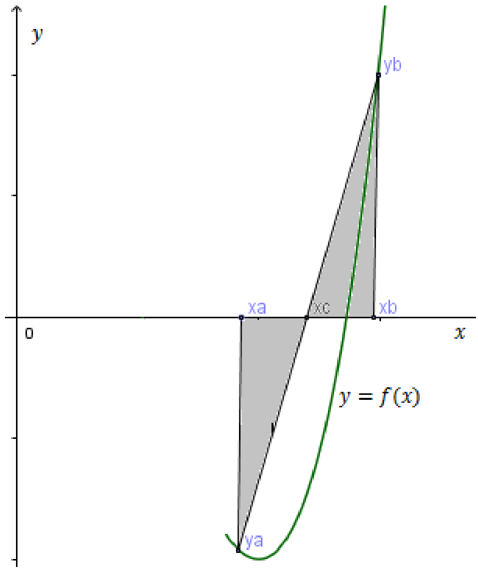
Proses iterasi pada metode bisection dapat dilakukan dengan bantuan program komputer, dimana dalam kasus ini digunakan bantuan *Microsoft Excel*. Rumus bisection diterjemahkan ke dalam formula *Microsoft Excel* dan evaluasi dalam penentuan interval diterjemahkan menggunakan fungsi *if*. Penggunaan *Microsoft Excel* dapat dengan mudah diterapkan pada metode numerik lainnya.

2.5 Metode Interpolasi Linier (*False-Position Method*)

Metode false position merupakan salah satu alternatif untuk mempercepat konvergensi yang menjadi salah satu kelemahan pada metode bisection. Selain itu, pada metode bisection pembagian interval mulai dari x_a hingga x_b selalu sama sehingga nilai fungsi $f(x_a)$ dan $f(x_b)$ kurang diperhitungkan. Padahal jika $f(x_a)$ lebih dekat ke nol daripada $f(x_b)$, kemungkinan besar akar lebih dekat ke x_a daripada x_b. Hal inilah yang menjadi salah satu pertimbangan munculnya metode interpolasi linier.

Metode *false position* adalah metode pencarian akar persamaan dengan memanfaatkan kemiringan dan selisih tinggi dari dua titik batas interval yang mengurung akar. Idenya adalah menarik garis lurus antara $f(x_a)$ dan $f(x_b)$, titik potong garis ini dengan sumbu X dijadikan sebagai x_c.

Illustrasi.



Gambar 2.4 Metode False Position

Keterangan gambar:

Nilai x_a dan x_b adalah nilai hampiran awal
Nilai x_c adalah nilai hampiran baru yang diperoleh dari perhitungan menggunakan rumus metode false position.

Berdasarkan Gambar 2.4, diasumsikan bahwa fungsi $f(x)$ adalah kontinu pada interval $[x_a, x_b]$, dan $f\ (x_a).f\ (x_b)\ <\ 0$. Kemudian penentuan x_c dilakukan dengan menggunakan hubungan persamaan garis yang melalui suatu titik $(x_a, f(x_a))$ dan $(x_b, f(x_b))$ dengan gradien m. Rumus gradien adalah $m = \frac{y}{x} = \frac{f(x_b)-f(x_a)}{x_b-x_a}$, sehingga persamaan garis menjadi:

$y - y_1 = m(x - x_1) \leftrightarrow y - f(x_a) = \frac{f(x_b)-f(x_a)}{x_b-x_a}(x - x_a)$,

Garis memotong sumbu X jika $y = 0$, sehingga diperoleh titik x sebagai hampiran akar (x_c) yaitu:

$-f(x_a) = \frac{f(x_b)-f(x_a)}{x_b-x_a}(x_c - x_a) \leftrightarrow x_c = x_a - f(x_a)\left[\frac{x_b-x_a}{f(x_b)-f(x_a)}\right]$

Langkah-langkah metode false position:

1. Pilih x_a dan x_b sebagai nilai hampiran awal. Kemudian periksa apakah benar $f(x_a).f(x_b) < 0$
2. Cari nilai hampiran baru (x_c) dengan rumus:

$$\boldsymbol{x_c = x_a - f(x_a)\left[\frac{x_b-x_a}{f(x_b)-f(x_a)}\right]} \text{ atau } \boldsymbol{x_c = \frac{(f(x_b)x_a - f(x_a)x_b)}{(f(x_b)-f(x_a))}}$$

3. Lakukan evaluasi untuk menentukan pada interval mana akar berada:
   a) Jika $f(x_a).f(x_c) < 0$: akar berada pada bagian interval bawah, maka $x_b = x_c$ dan kembali ke langkah 2. Hal ini menandakan akar di daerah interval x_a dan x_c.
   b) Jika $f(x_a).f(x_c) > 0$: akar berada pada bagian interval atas, maka $x_a = x_c$ dan

kembali ke langkah 2. Hal ini menandakan akar di daerah interval x_b dan x_c.

c) Jika $f(x_a).f(x_c) = 0$: akar setara dengan x_c, hentikan perhitungan.

Contoh:

1) Carilah salah solusi dari persamaan: $x^2 - 3 = 0$ dengan metode false position pada interval [1,2] dengan 5 iterasi!

Solusi:

Iterasi 0 (Perhitungan awal).

✓ Diketahui $f(x) = x^2 - 3$ dengan $x_a = 1$ dan $x_b = 2$, sehingga diperoleh:
$f(x_a) = {x_a}^2 - 3 = 1^2 - 3 = -2$
$f(x_b) = {x_b}^2 - 3 = 2^2 - 3 = 1$
dimana$f(x_a).f(x_b) < 0$

✓ Penentuan nilai hampiran baru (x_c) , yakni:
$x_c = \frac{(f(x_b)x_a - f(x_a)x_b)}{(f(x_b) - f(x_a))} = \frac{(1\times1)-(-2\times2)}{(1-(-2))} = \frac{5}{3} =$ 1,666667
dengan $f(x_c) = {x_c}^2 - 3 = (1{,}666667)^2 - 3 =$ $-0{,}22222$

✓ Penentuan interval baru, yakni:
$f(x_a).f(x_c) = -2 \times -0{,}22222 = 0{,}444444 > 0$, maka $x_a = x_c$

Diperoleh interval baru, yakni [1,666667,2] dimana $x_a = 1,666667$ dan $x_b = 2$

- ✓ Penentuan galat, yakni:
  Diketahui bahwa solusi eksak dari persamaan: $x^2 - 3 = 0$ adalah 1,732051, maka galat ditentukan sebagai berikut:
  $|\varepsilon_t| = \left|\frac{\text{nilai eksak} - \text{nilai hampiran}}{\text{nilai eksak}}\right| =$

  $\left|\frac{1,732051 - 1,666667}{1,732051}\right| = 0,03775$

Iterasi 1 (Pengulangan perhitungan pertama).

- ✓ Diketahui interval baru [1,666667,2] dimana $x_a = 1,666667$ dan $x_b = 2$ dengan
  $f(x_a) = {x_a}^2 - 3 = (1,666667)^2 - 3 = -0,22222$
  $f(x_b) = {x_b}^2 - 3 = 2^2 - 3 = 1$
  dimana $f(x_a).f(x_b) < 0$
- ✓ Penentuan nilai hampiran baru (x_c) , yakni:
  $x_c = \frac{(f(x_b)x_a - f(x_a)x_b)}{(f(x_b) - f(x_a))} =$
  $\frac{(1 \times 1,666667) - (-0,22222 \times 2)}{(1 - (-0,22222))} = 1,727273$
  dengan $f(x_c) = {x_c}^2 - 3 = (1,727273)^2 - 3 = -0,01653$
- ✓ Penentuan interval baru, yakni:

$f(x_a).f(x_c) = -0{,}22222 \times -0{,}01653 = 0{,}003673 > 0$, maka $x_a = x_c$
Diperoleh interval baru, yakni $[1{,}727273{,}2]$ dimana $x_a = 1{,}727273$ dan $x_b = 2$

✓ Penentuan galat, yakni:
$$|\varepsilon_t| = \left|\frac{\text{nilai eksak} - \text{nilai hampiran}}{\text{nilai eksak}}\right| = \left|\frac{1{,}732051 - 1{,}727273}{1{,}732051}\right| = 0{,}002759$$

Langkah-langkah yang sama dilakukan untuk iterasi 2 hingga iterasi 5, sehingga diperoleh hasil iterasi sebagai berikut:

n	x_a	x_b	x_c	$f(x_a)$	$f(x_b)$	$f(x_c)$	$f(x_a).f(x_c)$	$\lvert\varepsilon_t\rvert$
0	1	2	1.666667	-2	1	0.22222	0.444444	0.03775
1	1.666667	2	1.727273	-0.22222	1	0.01653	0.003673	0.002759
2	1.727273	2	1.731707	-0.01653	1	0.00119	1.97E-05	0.000198
3	1.731707	2	1.732026	-0.00119	1	-8.5E-05	1.02E-07	1.44E-05
4	1.732026	2	1.732049	-8.5E-05	1	-6.1E-06	5.24E-10	1.13E-06
5	1.732049	2	1.732051	-6.1E-06	1	-4.4E-07	2.7E-12	1.85E-07

Berdasarkan tabel hasil iterasi diperoleh akar persamaan adalah 1,732051 dengan galat relative 0,000000185.

2) Carilah salah solusi dari persamaan: $x^2 - 3 = 0$ dengan metode false position pada interval [1,2] dengan toleransi 0,0001!

Solusi:

Iterasi 0 (Perhitungan awal).

- ✓ Diketahui $f(x) = x^2 - 3$ dengan $x_a = 1$ dan $x_b = 2$, sehingga diperoleh:
  $f(x_a) = {x_a}^2 - 3 = 1^2 - 3 = -2$
  $f(x_b) = {x_b}^2 - 3 = 2^2 - 3 = 1$
  dimana $f(x_a).f(x_b) < 0$
- ✓ Penentuan taksiran nilai akar baru (x_c), yakni:
  $x_c = \frac{(f(x_b)x_a - f(x_a)x_b)}{(f(x_b) - f(x_a))} = \frac{(1\times1)-(-2\times2)}{(1-(-2))} = \frac{5}{3} = 1{,}666667$
  dengan $f(x_c) = {x_c}^2 - 3 = (1{,}666667)^2 - 3 = -0{,}22222$
- ✓ Penentuan interval baru, yakni:
  $f(x_a).f(x_c) = -2 \times -0{,}22222 = 0{,}444444 > 0$, maka $x_a = x_c$
  Diperoleh interval baru, yakni [1,666667,2] dimana $x_a = 1{,}666667$ dan $x_b = 2$
- ✓ Penentuan galat, yakni:
  Diketahui bahwa solusi eksak dari persamaan: $x^2 - 3 = 0$ adalah 1,732051, maka galat ditentukan sebagai berikut:
  $|\varepsilon_t| = \left|\frac{\text{nilai eksak} - \text{nilai hampiran}}{\text{nilai eksak}}\right| = \left|\frac{1{,}732051 - 1{,}666667}{1{,}732051}\right| = 0{,}03775$

Diperoleh bahwa galat lebih besar dari toleransi, yakni $0{,}03775 > 0{,}0001$ sehingga dilakukan pengulangan perhitungan (dilanjutkan ke iterasi 1).

Iterasi 1 (Pengulangan perhitungan pertama).

✓ Diketahui interval baru [1,666667,2] dimana $x_a = 1{,}666667$ dan $x_b = 2$ dengan
$f(x_a) = {x_a}^2 - 3 = (1{,}666667)^2 - 3 = -0{,}22222$
$f(x_b) = {x_b}^2 - 3 = 2^2 - 3 = 1$
dimana $f(x_a).f(x_b) < 0$

✓ Penentuan nilai hampiran baru (x_c), yakni:
$x_c = \frac{(f(x_b)x_a - f(x_a)x_b)}{(f(x_b) - f(x_a))} = \frac{(1\times1{,}666667)-(-0{,}22222\times2)}{(1-(-0{,}22222))} = 1{,}727273$
dengan $f(x_c) = {x_c}^2 - 3 = (1{,}727273)^2 - 3 = -0{,}01653$

✓ Penentuan interval baru, yakni:
$f(x_a).f(x_c) = -0{,}22222 \times -0{,}01653 = 0{,}003673 > 0$, maka $x_a = x_c$
Diperoleh interval baru, yakni [1,727273,2] dimana $x_a = 1{,}727273$ dan $x_b = 2$

✓ Penentuan galat, yakni:

$$|\varepsilon_t| = \left|\frac{\text{nilai eksak} - \text{nilai hampiran}}{\text{nilai eksak}}\right| =$$

$$\left|\frac{1{,}732051 - 1{,}727273}{1{,}732051}\right| = 0{,}002759$$

Diperoleh bahwa galat lebih besar dari toleransi, yakni 0,00
0,0001 sehingga dilanjutkan ke iterasi 2.

Langkah-langkah yang sama dilakukan untuk iterasi 2 dan iterasi selanjutnya hingga diperoleh galat lebih kecil dari toleransi, sehingga diperoleh hasil iterasi sebagai berikut:
Berdasarkan langkah-langkah false position diperoleh hasil iterasi sebagai berikut:

n	x_a	x_b	x_c	$f(x_a)$	$f(x_b)$	$f(x_c)$	$f(x_a).f(x_c)$	$\lvert\varepsilon_t\rvert$	*tol*
0	1	2	1,666667	-2	1	-0,22222	0,444444	0,03775	0,0001
1	1,666667	2	1,727273	-0,22222	1	-0,01653	0,003673	0,002759	0,0001
2	1,727273	2	1,731707	-0,01653	1	-0,00119	1,97E-05	0,000198	0,0001
3	1,731707	2	1,732026	-0,00119	1	-8,5E-05	1,02E-07	1,44E-05	0,0001

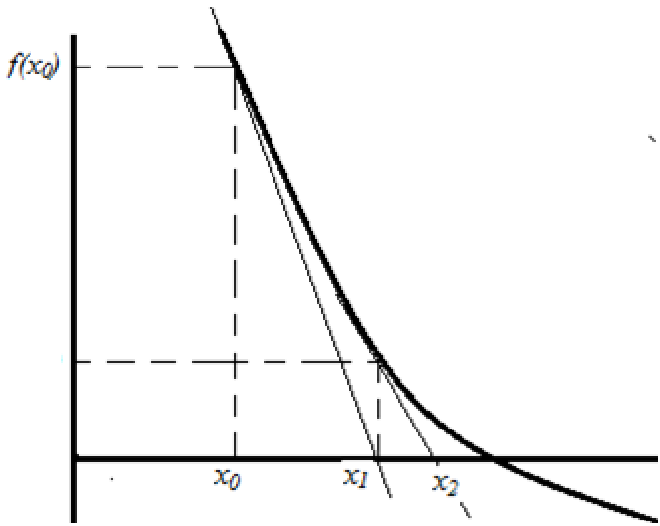
Berdasarkan tabel hasil iterasi diperoleh akar persamaan adalah 1,732026 pada iterasi ke-4 karena nilai galat relatif sudah lebih kecil dari toleransi yang diberikan, sehingga iterasi dihentikan.

Berdasarkan hasil dengan menggunakan metode false position, nilai yang diperoleh dengan menggunakan 5 iterasi lebih mendekati nilai eksak. Begitu juga dengan menggunakan toleransi, konvergensi lebih cepat didapat dibandingkan dengan hanya menggunakan 3 iterasi. Dibandingkan dengan metode bisection, maka false position lebih cepat dalam hal konvergensi.

2.6 Metode Newton-Raphson

Metode Newton Raphson menggunakan satu titik awal x_i sebagai nilai akar pertama dengan nilai fungsi $f(x_i)$. Kemudian ditarik suatu garis singgung yang melewati titik $[x_i, f(x_i)]$ dan memotong sumbu X. Garis singgung ini merupakan hampiran akar bagi iterasi berikutnya. Metode ini mengasumsikan bahwa $f(x)$ kontinu.

Illustrasi.



Gambar 2.5 Metode Newton Raphson

Keterangan gambar:

Nilai x_0 adalah nilai hampiran awal
Nilai x_1, x_2 adalah nilai hampiran yang diperoleh dari perhitungan menggunakan rumus metode Newton-Raphson

Ide dari metode Newton- Raphson adalah menghitung akar yang merupakan titik potong antara sumbu X dengan garis singgung pada kurva di titik $[x_i, f(x_i)]$. Jika gradien garis singgung adalah $f'(x_i)$, maka diperoleh persamaan garis yang melalui titik $[x_i, f(x_i)]$:
$y - y_1 = m(x - x_1) \leftrightarrow y - f(x_i) = f'(x_i)(x - x_i)$

Garis memotong *sumbu* X jika $y = 0$, sehingga diperoleh titik x_{i+1} sebagai hampiran akar: $-f(x_i) = f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) \leftrightarrow x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ dimana gradien $f'(x_i)$ merupakan turunan fungsi $f(x_i)$

Langkah-langkah metode Newton- Raphson:

1. Menentukan fungsi $f(x)$ yang akan dicari akarnya.
2. Menentukan turunan fungsi: $f'(x)$
3. Menginput nilai hampiran awal x_0.
4. Menghitung nilai hampiran akar dengan rumus Newton- Raphson, yakni:

$$\boldsymbol{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$$

5. Menampilkan hasil setelah iterasi memenuhi kriteria penghentian iterasi.

Contoh:

1) Carilah salah solusi dari persamaan: $x^2 - 3 = 0$ dengan metode Newton- Raphson pada titik awal 1 dengan 4 iterasi!

Solusi:

Iterasi 0 (Perhitungan awal).

- ✓ Diketahui $f(x) = x^2 - 3$ dengan $x_0 = 1$, sehingga diperoleh:

  $f'(x) = 2x$

  $f'(x_0) = 2x_0 = 2 \times 1 = 2$

  $f(x_0) = {x_0}^2 - 3 = 1^2 - 3 = -2$

- ✓ Penentuan nilai hampiran baru (x_{i+1}) , yakni:

  $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \leftrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{-2}{2} = 1 + 1 = 2$

  dengan $f(x_1) = {x_1}^2 - 3 = (2)^2 - 3 = 1$

- ✓ Penentuan galat, yakni:

  Diketahui bahwa solusi eksak dari persamaan: $x^2 - 3 = 0$ adalah 1,732051, maka galat ditentukan sebagai berikut:

  $|\varepsilon_t| = \left|\frac{\text{nilai eksak} - \text{nilai hampiran}}{\text{nilai eksak}}\right| = \left|\frac{1{,}732051 - 2}{1{,}732051}\right| =$

  0,1547

Iterasi 1 (Pengulangan perhitungan pertama).

- ✓ Diketahui nilai hampiran baru $x_1 = 2$ dengan
  $f(x_1) = {x_1}^2 - 3 = (2)^2 - 3 = 1$
  $f'(x_1) = 2x_1 = 2 \times 2 = 4$
- ✓ Penentuan nilai hampiran baru (x_{i+1}) , yakni:
  $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2 - \frac{1}{4} = 1{,}75$
  Dengan $f(x_2) = {x_2}^2 - 3 = (1{,}75)^2 - 3 = 0{,}0625$
- ✓ Penentuan galat, yakni:
  Diketahui bahwa solusi eksak dari persamaan: $x^2 - 3 = 0$ adalah 1,732051, maka galat ditentukan sebagai berikut:
  $|\varepsilon_t| = \left|\frac{\text{nilai eksak} - \text{nilai hampiran}}{\text{nilai eksak}}\right| =$
  $\left|\frac{1{,}732051 - 1{,}75}{1{,}732051}\right| = 0{,}010363$

Langkah-langkah yang sama dilakukan untuk iterasi 2 hingga iterasi 4, sehingga diperoleh hasil iterasi sebagai berikut:

n	***x_i***	***$f(x_i)$***	***$f'(x_i)$***	***x_{i+1}***	***$f(x_{i+1})$***	$\lvert\varepsilon_t\rvert$
0	1	-2	2	2	1	0,1547
1	2	1	4	1,75	0,0625	0,010363
2	1,75	0,0625	3,5	1,732143	0,000319	5,3E-05
3	1,732143	0,000319	3,464286	1,73205081	8.47E-09	1,1E-07
4	1,73205081	8.47E-09	3.464102	1.732050808	0	0

Berdasarkan tabel hasil iterasi diperoleh akar persamaan adalah 1,732050808 dengan galat relatif 0.

2) Carilah salah solusi dari persamaan: $x^2 - 3 = 0$ dengan metode Newton- Raphson pada itik awal 1 dengan toleransi 0,0001!

Solusi:

Iterasi 0 (Perhitungan awal).

- ✓ Diketahui $f(x) = x^2 - 3$ dengan $x_0 = 1$, sehingga diperoleh:

  $f'(x) = 2x$

  $f'(x_0) = 2x_0 = 2 \times 1 = 2$

  $f(x_0) = {x_0}^2 - 3 = 1^2 - 3 = -2$
- ✓ Penentuan nilai hampiran baru (x_{i+1}), yakni:

  $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \leftrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{-2}{2} = 1 + 1 = 2$

  dengan $f(x_1) = {x_1}^2 - 3 = (2)^2 - 3 = 1$
- ✓ Penentuan galat, yakni:

  Diketahui bahwa solusi eksak dari persamaan: $x^2 - 3 = 0$ adalah 1,732051, maka galat ditentukan sebagai berikut:

  $|\varepsilon_t| = \left|\frac{\text{nilai eksak} - \text{nilai hampiran}}{\text{nilai eksak}}\right| = \left|\frac{1,732051 - 2}{1,732051}\right| = 0,1547$

Diperoleh bahwa galat lebih besar dari toleransi, yakni $0{,}1547 > 0{,}0001$ sehingga dilakukan pengulangan perhitungan (dilanjutkan ke iterasi 1).

Iterasi 1 (Pengulangan perhitungan pertama).

- ✓ Diketahui nilai hampiran $x_1 = 2$ dengan $f(x_1) = {x_1}^2 - 3 = (2)^2 - 3 = 1$
  $f'(x_1) = 2x_1 = 2 \times 2 = 4$
- ✓ Penentuan nilai hampiran baru (x_{i+1}) , yakni:
  $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2 - \frac{1}{4} = 1{,}75$
  dengan $f(x_2) = {x_2}^2 - 3 = (1{,}75)^2 - 3 = 0{,}0625$
- ✓ Penentuan galat, yakni:
  Diketahui bahwa solusi eksak dari persamaan: $x^2 - 3 = 0$ adalah 1,732051, maka galat ditentukan sebagai berikut:
  $|\varepsilon_t| = \left|\frac{\text{nilai eksak}-\text{nilai hampiran}}{\text{nilai eksak}}\right| = \left|\frac{1{,}732051-1{,}75}{1{,}732051}\right| = 0{,}010363$
  Diperoleh bahwa galat lebih besar dari toleransi , yakni $0{,}010363 > 0{,}0001$ sehingga dilanjutkan ke iterasi 2.

Langkah-langkah yang sama dilakukan untuk iterasi 2 dan iterasi selanjutnya hingga diperoleh galat lebih kecil dari toleransi, sehingga diperoleh hasil iterasi sebagai berikut:

n	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}	$f(x_{i+1})$	$\lvert\varepsilon_t\rvert$	*tol*
0	1	-2	2	2	1	0,1547	0,0001
1	2	1	4	1,75	0,0625	0,010363	0,0001
2	1,75	0,0625	3,5	1,732143	0,000319	5,3E-05	0,0001

Berdasarkan tabel hasil iterasi diperoleh akar persamaan adalah 1,732143 pada iterasi ke-2 karena nilai galat relatif sudah lebih kecil dari toleransi yang diberikan, sehingga iterasi dihentikan.

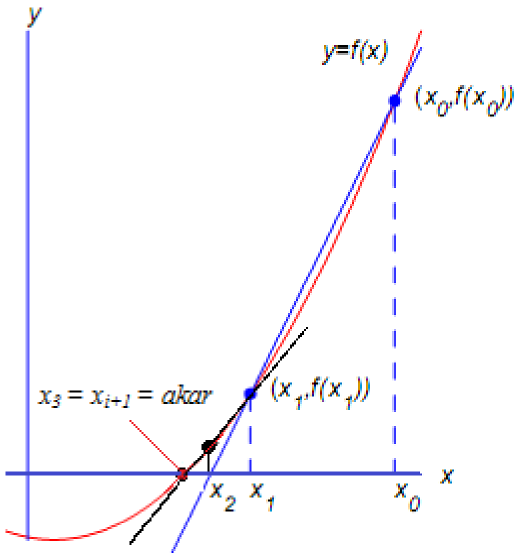
2.7 Metode Garis Potong (Secant Method)

Dalam setiap iterasi untuk metode Newton-Raphson dilakukan penghitungan turunan pertama fungsi $(f'(x))$, yang pada beberapa kasus sulit dan membutuhkan proses yang cukup lama untuk menghitungnya. Metode secant menghampiri turunan pertama fungsi $(f'(x))$ dengan $f'(x) \approx \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}$ dimana x_{i-1} dan x_i adalah dua hampiran akar untuk iterasi ke-i dan iterasi ke-$(i-1)$. Subtitusi hampiran $f'(x)$ ke rumus Newton-Raphson, sehingga diperoleh rumus metode secant, yakni:

$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$

Metode secant menggunakan dua nilai hampiran akar sebelumya (x_{i-1} dan x_i) untuk menentukan hampiran akar selanjutnya (x_{i+1}), tetapi tidak memperhatikan perubahan tanda dari $f(x)$. Nilai x_{i-1} adalah absis titik perpotongan garis lurus yang menghubungkan dua titik yaitu $(x_i, f(x_i))$ dengan $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$

Illustrasi.



Gambar 2.6 Metode Secant

Keterangan gambar:

Nilai x_0 dan x_1 adalah nilai hampiran awal

Nilai x_2, x_3 adalah nilai hampiran yang diperoleh dari perhitungan menggunakan rumus metode Secant

Langkah-langkah Metode Secant

1. Menentukan fungsi yang akan dihampiri nilai akarnya.
2. Menentukan x_0 dan x_1 sebagai hampiran awal.
3. Mensubstitusi nilai x_0 dan x_1 ke fungsi.
4. Menghitung nilai hampiran akar dengan rumus Secant, yakni:

$$\boldsymbol{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}}$$

5. Menampilkan hasil setelah iterasi memenuhi kriteria penghentian iterasi.

Contoh:

1) Carilah salah solusi dari persamaan: $x^2 - 3 = 0$ menggunakan metode Secant dengan $x_0 = 1$ dan $x_1 = 2$ (toleransi 0,0001) !
   Solusi:
   Iterasi 0 (Perhitungan awal).
   - ✓ Diketahui $f(x) = x^2 - 3$ dengan $x_0 = 1$ dan $x_1 = 2$, sehingga diperoleh:
     $f(x_0) = {x_0}^2 - 3 = 1^2 - 3 = -2$
     $f(x_1) = {x_1}^2 - 3 = 2^2 - 3 = 1$
   - ✓ Penentuan nilai hampiran baru (x_{i+1}) , yakni:

$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = 2 - \frac{1(2-1)}{1-(-2)} = 2 - \frac{1}{3} =$ 1,666667

Dengan $f(x_2) = {x_2}^2 - 3 = (1{,}666667)^2 - 3 = -0{,}22222$

- ✓ Penentuan galat, yakni:
  Diketahui bahwa solusi eksak dari persamaan: $x^2 - 3 = 0$ adalah 1,732051, maka galat ditentukan sebagai berikut:
  $|\varepsilon_t| = \left|\frac{\text{nilai eksak} - \text{nilai hampiran}}{\text{nilai eksak}}\right| = \left|\frac{1{,}732051 - 1{,}666667}{1{,}732051}\right| = 0{,}03775$
  Diperoleh bahwa galat lebih besar dari toleransi, yakni $0{,}03775 > 0{,}0001$ sehingga dilakukan pengulangan perhitungan (dilanjutkan ke iterasi 1).

Iterasi 1 (Pengulangan perhitungan pertama).

- ✓ Diketahui nilai hampiran $x_1 = 2$ dan $x_2 =$ 1,666667 dengan
  $f(x_1) = {x_1}^2 - 3 = 2^2 - 3 = 1$
  $f(x_2) = {x_2}^2 - 3 = (1{,}666667)^2 - 3 = -0{,}22222$
- ✓ Penentuan nilai hampiran baru (x_c) , yakni:
  $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = 1{,}666667 - \frac{(-0{,}22222)(1{,}666667-2)}{((-0{,}22222)-1)} = 1{,}727273$

dengan $f(x_3) = {x_3}^2 - 3 = (1{,}727273)^2 - 3 = -0{,}01653$

✓ Penentuan galat, yakni:

$|\varepsilon_t| = \left|\frac{\text{nilai eksak} - \text{nilai hampiran}}{\text{nilai eksak}}\right| = \left|\frac{1{,}732051 - 1{,}727273}{1{,}732051}\right| = 0{,}002759$

Diperoleh bahwa galat lebih besar dari toleransi, yakni $0{,}002759 > 0{,}0001$ sehingga dilanjutkan ke iterasi 2.

Langkah-langkah yang sama dilakukan untuk iterasi 2 dan iterasi selanjutnya hingga diperoleh galat lebih kecil dari toleransi, sehingga diperoleh hasil iterasi sebagai berikut:

n	$x_{(i-1)}$	x_i	$f(x_{(i-1)})$	$f(x_i)$	$x_{(i+1)}$	$f(x_{(i+1)})$	$\lvert\varepsilon_t\rvert$	*tol*
0	1	2	-2	1	1,666667	-0,22222	0,03775	0,0001
1	2	1,666667	1	-0,22222	1,727273	-0,01653	0,002759	0,0001
2	1,666667	1,727273	-0,22222	-0,01653	1,732143	0.000319	5,3E-05	0,0001

Berdasarkan tabel hasil iterasi diperoleh akar persamaan adalah 1,732143 pada iterasi ke-2 karena nilai galat relatif sudah lebih kecil dari toleransi yang diberikan, sehingga iterasi dihentikan.

RANGKUMAN

1. Metode pencarian akar adalah metode pencarian nilai-nilai dari variabel bebas yang membuat fungsi bernilai nol. Metode pencarian akar pada metode numerik dikelompokkan menjadi dua, yakni:

   a) Metode Pengurung

   Tebakan akar dalam metode pengurung selalu berada "dalam kurung" atau berada pada kedua sisi dari nilai akar dan diperlukan dua tebakan awal untuk menentukan hampiran nilai akar persamaan fungsi. Teorema yang mendasari metode ini adalah: “Diketahui $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ adalah kontinu, dimana $a, b \in \mathbb{R}$ dan $a < b$. Jika $f(a). f(b) < 0$, maka terdapat $c \in (a, b)$ sedemikian sehingga $f(c) = 0$”. Beberapa metode numerik yang tergolong dalam metode pengurung adalah Metode Bagi Dua (*Bisection Method*) dan Metode Interpolasi Linier/ Posisi Palsu (*False Position Method*).

   b) Metode Terbuka

   Pada metode terbuka, pencarian hampiran nilai akar persamaan fungsi dimulai dari suatu nilai tunggal variabel bebas, atau dua nilai yang tidak perlu mengurung akar.Beberapa metode numerik yang tergolong dalam metode terbuka adalah Metode *Newton- Raphson* dan Metode Garis Potong (*Secant Method*).

2. Metode grafik adalah metode sederhana yang dapat digunakan untuk menentukan perkiraan akar dari fungsi dan untuk memperoleh tebakan awal. Ada dua metode grafik yang dapat dilakukan untuk mendapatkan tebakan awal dari akar persamaan $f(x) = 0$, yakni:
   a) Metode Grafik Tunggal
   Pada metode grafik tunggal, tebakan awal dipilih yang dekat dengan absis dari titik perpotongan atau akar persamaan $f(x) = 0$.
   b) Metode Grafik Ganda
   Metode grafik ganda digunakan untuk persamaan fungsi $f(x) = 0$ yang penjabaran fungsinya dapat didekomposisi menjadi pengurangan dua buah fungsi, yaitu $f(x) = f_1(x) - f_2(x) = 0$.

3. Metode bisection adalah suatu metode yang mengasumsikan bahwa interval selalu dibagi dua sama lebar. Langkah-langkah metode bisection, yakni:
   a) Pilih x_a dan x_b sebagai taksiran akar. Kemudian periksa apakah benar $f(x_a).f(x_b) < 0$

b) Cari taksiran nilai akar baru (x_c) dengan rumus: $x_c = \frac{x_a+x_b}{2}$.

c) Lakukan evaluasi untuk menentukan pada interval mana akar berada dengan menggunakan kriteria berikut:
   i. Jika $f(x_a).f(x_c) < 0$: akar berada pada bagian interval bawah, maka $x_b = x_c$ dan kembali ke langkah 2. Pada kondisi ini akar di daerah interval $x_a$dan x_c.
   ii. Jika $f(x_a).f(x_c) > 0$: akar berada pada bagian interval atas, maka $x_a = x_c$ dan kembali ke langkah 2. Pada kondisi ini akar di daerah interval x_b dan x_c
   iii. Jika $f(x_a).f(x_c) = 0$: akar setara dengan x_c, hentikan perhitungan.

4. Metode false position adalah metode pencarian akar persamaan dengan memanfaatkan kemiringan dan selisih tinggi dari dua titik batas interval yang mengurung akar. Langkah-langkah metode false position:
   a) Pilih x_a dan x_b sebagai taksiran akar. Kemudian periksa apakah benar $f(x_a).f(x_b) < 0$
   b) Cari taksiran nilai akar baru (x_c) dengan rumus:

$x_c = x_a - f(x_a)\left[\frac{x_b - x_a}{f(x_b) - f(x_a)}\right]$ atau $x_c = \frac{(f(x_b)x_a - f(x_a)x_b)}{(f(x_b) - f(x_a))}$

c) Lakukan evaluasi untuk menentukan pada interval mana akar berada:

   i. Jika $f(x_a).f(x_c) < 0$: akar berada pada bagian interval bawah, maka $x_b = x_c$ dan kembali ke langkah 2. Hal ini menandakan akar di daerah interval $x_a$dan x_c.

   ii. Jika $f(x_a).f(x_c) > 0$: akar berada pada bagian interval atas, maka $x_a = x_c$ dan kembali ke langkah 2. Hal ini menandakan akar di daerah interval x_b dan x_c.

   iii. Jika $f(x_a).f(x_c) = 0$: akar setara dengan x_c, hentikan perhitungan.

5. Metode Newton Raphson adalah metode yang menggunakan satu titik awal x_i sebagai nilai akar pertama dengan nilai fungsi $f(x_i)$. Ide dari metode Newton- Raphson adalah menghitung akar yang merupakan titik potong antara sumbu X dengan garis singgung pada kurva di titik $[x_i, f(x_i)]$. Langkah-langkah metode Newton-Raphson:

   a) Menentukan fungsi $f(x)$ yang akan dicari akarnya.

b) Menentukan turunan fungsi: $f'(x)$
c) Menginput nilai hampiran awal x_0.
d) Menghitung nilai hampiran akar dengan : $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$
e) Menampilkan hasil setelah iterasi memenuhi kriteria penghentian iterasi.

6. Metode secant adalah metode yang menggunakan dua nilai hampiran akar sebelumya (x_{i-1}dan x_i) untuk menentukan hampiran akar selanjutnya (x_{i+1}), tetapi tidak memperhatikan perubahan tanda dari $f(x)$. Nilai x_{i-1} adalah absis titik perpotongan garis lurus yang menghubungkan dua titik yaitu $\left(x_i, f(x_i)\right)$ dengan $\left(x_{i-1}, f(x_{i-1})\right)$.
Langkah-langkah Metode Secant:
a) Menentukan fungsi yang akan dihampiri nilai akarnya.
b) Menentukan x_o dan x_1 sebagai hampiran awal.
c) Mensubstitusi nilai x_o dan x_1 ke fungsi.
d) Menghitung nilai hampiran akar dengan: $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$
e) Menampilkan hasil setelah iterasi memenuhi kriteria penghentian iterasi.

7. Terdapat beberapa kriteria penghentian iterasi, diantaranya:

a) Jika galat relatif (ε_t) sudah lebih kecil dari toleransi (ε) yang diberikan:
$|\varepsilon_t| = \left|\frac{x_{c_{\mathrm{baru}}} - x_{c_{\mathrm{lama}}}}{x_{c_{\mathrm{baru}}}}\right| < \varepsilon$

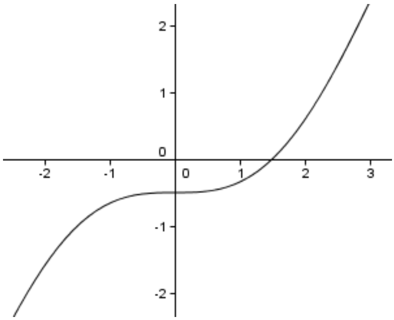
b) Jika iterasi sudah mencapai iterasi maksimal: $n_{maks} = N$

c) Jika nilai fungsi hampirannya sudah lebih kecil dari toleransi yang diberikan: $|f(x_c)| < \varepsilon$

LATIHAN

1. Gunakan metode bisection untuk mencari salah satu akar persamaan:
   $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4$ dengan toleransi 0,01 pada interval berikut:
   a) $[-2,0]$ b) $[0,2]$ c) $[1,2]$
   Bandingkan hasil yang diperoleh.
2. Gunakan metode false position untuk mencari salah satu akar dari persamaan: $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ pada interval $[1,2]$ dengan toleransi 0,0001.
3. Tentukan hampiran nilai x menggunakan metode Newton-Raphson untuk persamaan $x^2 + 10\cos x$ pada toleransi 0,0005 dengan nilai awal:
   a) 1 b) 3
   Bandingkan hasil yang diperoleh.
4. Tentukan nilai dari $\sqrt{10}$ menggunakan metode Newton-Raphson dengan toleransi 10^{-8}!
   (**Petunjuk**. Tentukan terlebih dahulu fungsi $f(x)$)
5. Carilah solusi dari persamaan: $x^2 - 7 = 0$ menggunakan metode secant dengan $x_0 = 2$ dan $x_1 = 3$ (toleransi 0,0001).

6. Perhatikan gambar berikut!



Gunakan salah satu metode numerik untuk menentukan akar persamaan $x - \sin(x) - \frac{1}{2} = 0$ yang disajikan pada gambar di atas. Sertakan alasan penggunaan metode.

7. Tuliskan persamaan dan perbedaan antara false position dan secant.

BAB 3
SOLUSI SISTEM PERSAMAAN LINIER

Tujuan:

- Mahasiswa mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, dan sistematis dalam memahami konsep teoretis metode numerik yang terkait dengan penentuan solusi sistem persamaan linier.
- Mahasiswamenunjukkan kinerja mandiri dan rasa tanggung jawab dalam menerapkan konsep teoretismetode numerik dalam menyelesaikan soal yang terkait dengan penentuan solusi sistem persamaan linier.

"Coming together is a beginning, staying together is progress and working together is success"
(Henry Ford-pendiri Ford Motor Company)

Sistem persamaan linier $Ax = b$ dengan n persamaan dan n peubah memiliki bentuk umum sebagai berikut:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_2$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

Untuk menyelesaikan sistem persamaan linier tersebut dapat dilakukan dengan menuliskan sistem persamaan linier ke dalam bentuk notasi matriks, seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$, dengan

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ adalah matriks koefisien dan

$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$ adalah matriks konstanta.

Sistem persamaan linier dalam bentuk notasi matriks dapat diselesaikan dengan metode langsung (metode analitik) atau metode iterasi (metode numerik).

3.1 Metode Langsung (Metode Analitik)

Metode langsung (metode analitik) dalam menentukan solusi sistem persamaan linier kurang efisien untuk menyelesaikan sistem persamaan linier yang besar. Beberapa metode langsung yang dapat diterapkan, yakni:

3.1.1 Eliminasi Gauss

Pada eliminasi Gauss, sistem persamaan linier $Ax = b$ dibentuk menjadi sistem persamaan segitiga atas $UX = Y$ yang setara, kemudian solusi X diselesaikan memakai metode substitusi mundur. Berikut ini contoh persamaan segitiga atas dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Ide dari metode eliminasi Gauss adalah memanipulsi persamaan-persamaan yang ada dengan menghilangkan salah satu variabel dari persamaan-persamaan tersebut, sehingga tersisa satu persamaan dengan satu variabel (sistem persamaan segitiga atas). Kemudian hasilnya disubtitusikan ke persamaan lain untuk memperoleh penyelesaian.

Pembentukan $Ax = b$ menjadi sistem persamaan segitiga atas $UX = Y$ dapat dilakukan dengan operasi baris elementer (OBE), yaitu:

1) Pertukarkan dua baris
2) Kalikan suatu baris dengan skalar yang tidak nol
3) Jumlahkan suatu baris dengan hasil kali pada baris yang lain.

Contoh:

1) Tentukan solusi sistem persamaan linier berikut dengan metode eliminasi Gauss

$2x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 9$

$x_1 + 9x_2 - 6x_3 = 1$

$-3x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 6$

Solusi.

Diketahui sistem persamaan linier:

$2x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 9$

$x_1 + 9x_2 - 6x_3 = 1$

$-3x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 6$

Bentuk matriks dari sistem persamaan linier ini adalah:

$$\begin{bmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 1 & 9 & -6 \\ -3 & 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan akan dibentuk menjadi sistem persamaan segitiga atas menggunakan OBE:

$\begin{bmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 1 & 9 & -6 \\ -3 & 8 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$, kalikan baris ke-3 dengan $\frac{1}{3}$ kemudian jumlahkan baris ke-2 dengan hasilnya:

$\begin{bmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 0 & \frac{35}{3} & -\frac{13}{3} \\ -3 & 8 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$, kalikan baris ke-1 dengan $\frac{3}{2}$ kemudian jumlahkan baris ke-3 dengan hasilnya:

$\begin{bmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 0 & \frac{35}{3} & -\frac{13}{3} \\ 0 & -\frac{5}{2} & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ \frac{39}{2} \end{bmatrix}$, kalikan baris ke-2 dengan $\frac{3}{14}$ kemudian jumlahkan baris ke-3 dengan hasilnya:

$\begin{bmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 0 & \frac{35}{3} & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & \frac{141}{14} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ \frac{282}{14} \end{bmatrix}$, kalikan baris ke-2 dengan 3 dan kalikan baris ke-3 dengan 14:

$\begin{bmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 0 & 35 & -13 \\ 0 & 0 & 141 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 282 \end{bmatrix}$

Diperoleh sistem persamaan segitiga atas, yakni:

$2x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 9$

$35x_2 - 13x_3 = 9$

$141x_3 = 282$, dimana $x_3 = 2$

Dengan subtitusi mundur diperoleh: $x_1 = 4$ dan $x_2 = 1$

$\therefore$ Solusi sistem persamaan linier adalah $x_1 = 4$, $x_2 = 1$, dan $x_3 = 2$

3.1.2 Eliminasi Gauss Jordan

Eliminasi Gauss Jordan merupakan pengembangan dari eliminasi Gauss. Pada eliminasi Gauss Jordan, matriks koefisien dirubah menjadi matriks identitas, yakni bentuk $Ax = b$ dirubah menjadi bentuk $IX = Y$, dimana I adalah matriks identitas. Berikut ini contoh bentuk $IX = Y$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Contoh:

1) Tentukan solusi sistem persamaan linier berikut dengan metode eliminasi Gauss Jordan.

$2x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 9$

$x_1 + 9x_2 - 6x_3 = 1$

$-3x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 6$

Solusi.

Diketahui sistem persamaan linier:

$2x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 9$

$x_1 + 9x_2 - 6x_3 = 1$

$-3x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 6$

Bentuk matriks dari sistem persamaan linier ini adalah:

$$\begin{bmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 1 & 9 & -6 \\ -3 & 8 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan akan dibentuk menjadi $IX = Y$ menggunakan OBE:

$\begin{bmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 1 & 9 & -6 \\ -3 & 8 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$, kalikan baris ke-1 dengan $\frac{1}{2}$ diperoleh:

$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-7}{2} & 2 \\ 0 & \frac{35}{3} & -\frac{13}{3} \\ -3 & 8 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$, kalikan baris ke-1 dengan -1 kemudian jumlahkan baris ke-2 dengan hasilnya dan kalikan baris ke-1 dengan 3 kemudian jumlahkan baris ke-3 dengan hasilnya:

$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-7}{2} & 2 \\ 0 & \frac{25}{2} & -8 \\ 0 & \frac{-5}{2} & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{-7}{2} \\ \frac{39}{2} \end{bmatrix}$, kalikan baris ke-2 dengan $\frac{2}{25}$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-7}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{-16}{25} \\ 0 & \frac{-5}{2} & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{-7}{25} \\ \frac{39}{2} \end{bmatrix},$$ kalikan baris ke-2 dengan $\frac{7}{2}$ kemudian jumlahkan baris ke-1 dengan hasilnya dan kalikan baris ke-2 dengan $\frac{5}{2}$ kemudian jumlahkan baris ke-3 dengan hasilnya:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-6}{25} \\ 0 & 1 & \frac{-16}{25} \\ 0 & 0 & \frac{47}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{88}{25} \\ \frac{-7}{25} \\ \frac{94}{5} \end{bmatrix},$$ kalikan baris ke-3 dengan $\frac{5}{47}$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-6}{25} \\ 0 & 1 & \frac{-16}{25} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{88}{25} \\ \frac{-7}{25} \\ 2 \end{bmatrix},$$ kalikan baris ke-3 dengan $\frac{6}{25}$ kemudian jumlahkan baris ke-1 dengan hasilnya dan kalikan baris ke-3 dengan $\frac{16}{25}$ kemudian jumlahkan baris ke-2 dengan hasilnya:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solusi sistem persamaan linier adalah $x_1 = 4$, $x_2 = 1$, dan $x_3 = 2$

3.1.3 Eliminasi Gauss Jordan dengan Pivoting

Pada sistem persamaan linier dikenal adanya persamaan pivot (persamaan tumpuan), yakni persamaan pada baris pertama.

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \rightarrow$ persamaan pivot dengan a_{11} adalah elemen pivot

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_2$

$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$

Jika elemen pivot = 0 (sangat kecil), maka akan muncul pembagian dengan nol. Oleh karena itu perlu dilakukan proses pivoting, yakni mempertukarkan baris-baris yang ada dalam sistem persamaan linier, sehingga elemen pivot adalah elemen terbesar.

Contoh:

1) Tentukan solusi sistem persamaan linier berikut.

$0{,}0003x_1 + 3x_2 = 2{,}0001$

$x_1 + x_2 = 1$

Solusi.

Diketahui sistem persamaan linier:

$0{,}0003x_1 + 3x_2 = 2{,}0001$

$x_1 + x_2 = 1$

Bentuk matriks dari sistem persamaan linier ini adalah:

$$\begin{bmatrix} 0{,}0003 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}0001 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Elemen pivotnya adalah 0,0003 sehingga perlu dilakukan pivoting, yakni dengan menukar baris ke-1 dengan ke-2 diperoleh:

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}0003 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2{,}0001 \end{bmatrix}$, kalikan baris ke-1 dengan -0,0003 kemudian jumlahkan baris ke-2 dengan hasilnya:

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2{,}9997 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}9998 \end{bmatrix}$, kalikan baris ke-2 dengan $\frac{1}{2{,}9997}$ diperoleh:

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}67 \end{bmatrix}$, kalikan baris ke-2 dengan -1 kemudian jumlahkan baris ke-1 dengan hasilnya:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}33 \\ 0{,}67 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ Solusi sistem persamaan linier adalah $x_1 = 0{,}33$ dan $x_2 = 0{,}67$

Seperti telah dinyatakan sebelumnya bahwa metode langsung memiliki keterbatasan dalam menangani sistem persamaan linier yang besar, sehingga diperlukan metode numerik untuk mengatasinya. Selanjutnya, akan dibahas mengenai metode iterasi yang merupakan metode numerik dalam menyelesaiakan sistem persamaan linier.

3.2 Metode Iterasi

Metode iterasi dimulai dari penentuan nilai awal vektor x^0 sebagai suatu penyelesaian awal untuk x. Sistem persamaan $Ax = b$ dituliskan menjadi
$IX = (I - A)X + B$, sehingga sistem persamaan untuk iterasi ke-k adalah:
$IX^{(k)} = (I - A)X^{(k-1)} + b$; dimana $n = 1, 2, \dots$ dan x^0adalah tebakan awal.
Beberapa metode iterasi yang dapat diterapkan adalah iterasi Jacobi dan iterasi Gauss Seidel.

3.2.1 Iterasi Jacobi

Misalkan terdapat sistem persamaan $Ax = b$ dengan elemen-elemen diagonal semuanya tidak nol, yakni:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_2$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

Jika $a_{ii} = 0$ atau nilainya kecil, maka harus diadakan pengaturan sehingga $a_{ii} \neq 0$ (dilakukan penukaran baris-baris dan kolom-kolom). Persamaan pertama pada sistem persamaaan linier dapat diselesaikan untuk x_1, persamaan kedua untuk x_2 dan seterusnya yang dituliskan sebagai berikut:

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n}{a_{22}}$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}}{a_{nn}}$$

Proses iterasi untuk memperoleh nilai hampiran $x_1, x_2, \dots, x_n$ dimulai dengan menentukan tebakan awal untuk nilai x tersebut, yakni $x_i^{(0)}$. Berdasarkan tebakan awal ini akan diperoleh nilai $x_i^{(1)}$ dan iterasi berlanjut hingga diperoleh nilai $x_i^{(k)}$. Kondisi ini dapat dituliskan sebagai berikut:

$$x_1{}^{(k)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2{}^{(k-1)} - a_{13}x_3{}^{(k-1)} - \dots - a_{1n}x_n{}^{(k-1)}}{a_{11}}$$

$$x_2{}^{(k)} = \frac{b_2 - a_{21}x_1{}^{(k-1)} - a_{23}x_3{}^{(k-1)} - \dots - a_{1n}x_n{}^{(k-1)}}{a_{22}}$$

$$\vdots$$

$$x_n{}^{(k)} = \frac{b_n - a_{n1}x_1{}^{(k-1)} - a_{n2}x_2{}^{(k-1)} - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}{}^{(k-1)}}{a_{nn}}$$

Secara umum dapat dituliskan:

$$\boldsymbol{x_i^{(k)}} = \frac{\boldsymbol{b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}}}{\boldsymbol{a_{ii}}}$$

dimana $n = 1, 2, \dots$, $x_i^{(0)}$ adalah tebakan awal, dan $x_i^{(k)}$ adalah nilai hampiran ke-k untuk $k = 1,2, \dots$

Berikut ini langkah-langkah Iterasi Jacobi:

a) Menentukan sistem persamaan.

b) Menentukan penyelesaian awal/tebakan awal $\left(x_i^{(0)}\right)$

c) Menentukan iterasi maksimum atau toleransi

d) Membentuk sistem persamaan menjadi $x_i^{(n)} = \frac{b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(n-1)}}{a_{ii}}$, dimana $n = 1, 2, \ldots$

e) Iterasi dihentikan jika memenuhi kriteria konvergen, yakni:

$$\max_{1\leq i\leq n} \left|\frac{x_i{}^j - x_i{}^{j-1}}{x_i{}^j}\right| < \text{toleransi}$$

f) Menampilkan hasil

Contoh:

1. Tentukan solusi sistem persamaan linier berikut menggunakan iterasi Jacobi dengan $x_i^{(0)} = 0$ dan toleransi 0,01!

$$10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$$
$$-x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25$$
$$2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11$$
$$3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15$$

Solusi:

Sistem persamaan linier diubah ke dalam bentuk:

$$x_1 = \frac{6 + x_2 - 2x_3}{10}$$
$$x_2 = \frac{25 + x_1 + x_3 - 3x_4}{11}$$
$$x_3 = \frac{-11 - 2x_1 + x_2 + x_4}{10}$$
$$x_4 = \frac{15 - 3x_2 + x_3}{8}$$

Karena $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = x_4^{(0)} = 0$, maka:

Iterasi 1 (Pengulangan perhitungan pertama).

$x_1{}^{(1)} = \frac{6+x_2{}^{(0)}-2x_3{}^{(0)}}{10} = 0{,}6$

$x_2{}^{(1)} = \frac{25+x_1{}^{(0)}+x_3{}^{(0)}-3x_4{}^{(0)}}{11} = 2{,}2727$

$x_3{}^{(1)} = \frac{-11-2x_1{}^{(0)}+x_2{}^{(0)}+x_4{}^{(0)}}{10} = -1{,}1$

$x_4{}^{(1)} = \frac{15-3x_2{}^{(0)}+x_3{}^{(0)}}{8} = 1{,}875$

Penentuan galat pada iterasi 1, yakni:

$|\varepsilon_1| =$
$\left|\frac{\text{nilai hampiran sekarang}-\text{nilai hampiran sebelumnya}}{\text{nilai hampiran sekarang}}\right| =$
$\left|\frac{0{,}6-0}{0{,}6}\right| = 1$

$|\varepsilon_2| =$
$\left|\frac{\text{nilai hampiran sekarang}-\text{nilai hampiran sebelumnya}}{\text{nilai hampiran sekarang}}\right| =$
$\left|\frac{2{,}2727-0}{2{,}2727}\right| = 1$

$|\varepsilon_3| =$
$\left|\frac{\text{nilai hampiran sekarang}-\text{nilai hampiran sebelumnya}}{\text{nilai hampiran sekarang}}\right| =$
$\left|\frac{-1{,}1-0}{-1{,}1}\right| = 1$

$|\varepsilon_4| =$
$\left|\frac{\text{nilai hampiran sekarang}-\text{nilai hampiran sebelumnya}}{\text{nilai hampiran sekarang}}\right| =$
$\left|\frac{1{,}875-0}{1{,}875}\right| = 1$

Diperoleh bahwa $\max\limits_{1\le i\le n}\left|\frac{x_i{}^j - x_i{}^{j-1}}{x_i{}^j}\right| = \max\limits_{1\le i\le n}(1; 1; 1; 1) = 1 > \text{toleransi}$, sehingga dilanjutkan ke iterasi 2.

Lebih lanjut proses iterasi Jacobi disajikan pada tabel berikut:

iterasi	x_1	x_2	x_3	x_4	$\lvert\varepsilon_1\rvert$	$\lvert\varepsilon_2\rvert$	$\lvert\varepsilon_3\rvert$	$\lvert\varepsilon_4\rvert$	*tol*
0	0	0	0	0					
1	0,6	2,2727	-1,1	1,875	1	1	1	1	0,01
2	1,0473	1,7159	-0,8052	0,8852	0,4271	0,3245	0,3661	1,1181	0,01
3	0,9326	2,0533	-1,0493	1,1309	0,1229	0,1643	0,2326	0,2172	0,01
4	1,0152	1,9537	-0,9681	0,9738	0,0813	0,0510	0,0839	0,1613	0,01
5	0,989	2,0114	-1,0103	1,0214	0,0265	0,0287	0,0417	0,0465	0,01
6	1,0032	1,9922	-0,9945	0,9944	0,0142	0,0096	0,0159	0,0271	0,01
7	0,9981	2,0023	-1,002	1,0036	0,0051	0,0050	0,0074	0,0091	0,01
8	1,0006	1,9987	-0,999	0,9989	0,0025	0,0018	0,0029	0,0047	0,01

Berdasarkan hasil iterasi diperoleh solusi sistem persamaan linier adalah

$x_1 = 1{,}00;\ x_2 = 1{,}998;\ x_3 = -0{,}999;\ x_4 = 0{,}9989$

karena $\max\limits_{1\le i\le n}\left|\frac{x_i{}^j - x_i{}^{j-1}}{x_i{}^j}\right| = \max\limits_{1\le i\le n}(0{,}0025; 0{,}0018; 0{,}0029; 0{,}0047) = 0{,}0047 < \text{toleransi}$

3.2.2 Iterasi Gauss Seidel

Iterasi Gauss Seidel merupakan modifikasi dari iterasi Jacobi, yaitu setiap nilai x_i yang baru dihasilkan segera dipakai pada persamaan berikutnya untuk menentukan nilai yang lainnya. Kondisi ini dapat dituliskan sebagai berikut:

$$x_1{}^{(k)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2{}^{(k-1)} - a_{13}x_3{}^{(k-1)} - \dots - a_{1n}x_n{}^{(k-1)}}{a_{11}}$$

$$x_2{}^{(k)} = \frac{b_2 - a_{21}x_1{}^{(k)} - a_{23}x_3{}^{(k-1)} - \dots - a_{1n}x_n{}^{(k-1)}}{a_{22}}$$

$$\vdots$$

$$x_n{}^{(k)} = \frac{b_n - a_{n1}x_1{}^{(k)} - a_{n2}x_2{}^{(k)} - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}{}^{(k)}}{a_{nn}}$$

Secara umum, sistem persamaan tersebut dapat dituliskan:

$$\boldsymbol{x_i^{(k)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}}{a_{ii}}}$$

dimana $n = 1, 2, \dots$, $x_i^{(0)}$ adalah tebakan awal, dan $x_i^{(k)}$ adalah nilai hampiran ke-k untuk $k = 1,2,\dots$

Penggunaan nilai x_i yang baru diperoleh pada persamaan berikutnya mengakibatkan konvergensi pada iterasi Gauss Seidel lebih cepat dibandingkan iterasi Jacobi.

Langkah-langkah Iterasi Gauss Seidel, yakni:

1) Menentukan sistem persamaan.
2) Menentukan penyelesaian awal $\left(x_i^{(0)}\right)$
3) Menentukan iterasi maksimum atau toleransi

4) Membentuk sistem persamaan menjadi $x_i^{(k)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)}}{a_{ii}}$, dimana $n = 1, 2, \ldots$

5) Iterasi dihentikan jika memenuhi kriteria konvergen, yakni: $\max_{1 \le i \le n} \left| \frac{x_i{}^j - x_i{}^{j-1}}{x_i{}^j} \right| <$ toleransi

6) Menampilkan hasil

Contoh:

1) Tentukan solusi sistem persamaan linier berikut dengan iterasi *Gauss Seidel* dengan $x_i^{(0)} = 0$ dan toleransi 0,01!

$10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$
$-x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25$
$2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11$
$3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15$

Solusi:

Sistem persamaan linier diubah ke dalam bentuk:

$x_1 = \frac{6 + x_2 - 2x_3}{10}$

$x_2 = \frac{25 + x_1 + x_3 - 3x_4}{11}$

$x_3 = \frac{-11 - 2x_1 + x_2 + x_4}{10}$

$x_4 = \frac{15 - 3x_2 + x_3}{8}$

Karena $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = x_4^{(0)} = 0$, maka:

Iterasi 1 (Pengulangan perhitungan pertama).

$x_1{}^{(1)} = \frac{6 + x_2{}^{(0)} - 2x_3{}^{(0)}}{10} = 0{,}6$

$$x_2^{(1)} = \frac{25+x_1^{(1)}+x_3^{(0)}-3x_4^{(0)}}{11} = 2{,}3273$$

$$x_3^{(1)} = \frac{-11-2x_1^{(1)}+x_2^{(1)}+x_4^{(0)}}{10} = -0{,}9873$$

$$x_4^{(1)} = \frac{15-3x_2^{(1)}+x_3^{(1)}}{8} = 0{,}8789$$

Penentuan galat pada iterasi 1, yakni:

$$|\varepsilon_1| = \left|\frac{\text{nilai hampiran sekarang}-\text{nilai hampiran sebelumnya}}{\text{nilai hampiran sekarang}}\right| = \left|\frac{0{,}6-0}{0{,}6}\right| = 1$$

$$|\varepsilon_2| = \left|\frac{\text{nilai hampiran sekarang}-\text{nilai hampiran sebelumnya}}{\text{nilai hampiran sekarang}}\right| = \left|\frac{2{,}3273-0}{2{,}3273}\right| = 1$$

$$|\varepsilon_3| = \left|\frac{\text{nilai hampiran sekarang}-\text{nilai hampiran sebelumnya}}{\text{nilai hampiran sekarang}}\right| = \left|\frac{-0{,}9873-0}{-0{,}9873}\right| = 1$$

$$|\varepsilon_4| = \left|\frac{\text{nilai hampiran sekarang}-\text{nilai hampiran sebelumnya}}{\text{nilai hampiran sekarang}}\right| = \left|\frac{0{,}8789-0}{0{,}8789}\right| = 1$$

Diperoleh bahwa $\max\limits_{1\le i\le n}\left|\frac{x_i^{j}-x_i^{j-1}}{x_i^{j}}\right| = \max\limits_{1\le i\le n}(1;1;1;1) = 1 > \text{toleransi}$, sehingga dilanjutkan ke iterasi 2.

Lebih lanjut proses iterasi Gauss Seidel disajikan pada tabel berikut:

iterasi	*x₁*	*x₂*	*x₃*	*x₄*	$\lvert\varepsilon_1\rvert$	$\lvert\varepsilon_2\rvert$	$\lvert\varepsilon_3\rvert$	$\lvert\varepsilon_4\rvert$	*tol*
0	0	0	0	0					
1	0,6	2,3273	-0,9873	0,8789	1	1	1	1	0,01
2	1,0302	2,0369	-1,0145	0,9843	0,4176	0,1425	0,0268	0,1072	0,01
3	1,0066	2,0036	-1,0025	0,9984	0,0234	0,0167	0,0119	0,0140	0,01
4	1,0009	2,0003	-1,0003	0,9998	0,0057	0,0016	0,0022	0,0015	0,01

Berdasarkan hasil iterasi diperoleh solusi sistem persamaan linier adalah $x_1 = 1{,}0009$; $x_2 = 2{,}0003$; $x_3 = -1{,}0003$; $x_4 = 0{,}9998$ karena $\max\limits_{1\le i\le n}\left|\frac{x_i^{\,j}-x_i^{\,j-1}}{x_i^{\,j}}\right| = \max\limits_{1\le i\le n}(0{,}0057; 0{,}0016; 0{,}0022; 0{,}0015) = 0{,}0057 <$ toleransi

Iterasi pada Jacobi dan Gauss Seidel bisa saja tidak konvergen (menuju suatu nilai tertentu) jika matriks tidak diagonal utama (Kaw, 2011). Suatu matriks dikatakan diagonal utama jika koefisien pada diagonal utama lebih besar atau sama dengan jumlah koefisien pada baris itu. Kondisi ini dituliskan sebagai berikut:

$$Ax = b \leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

matriks A dikatakan diagonal utama jika untuk setiap i berlaku $|a_{ii}| \ge \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{n} |a_{ij}|$, atau untuk paling sedikit satu

i berlaku $|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$. Jadi jika kondisi ini tidak terpenuhi, maka proses iterasi bisa konvergen atau bisa tidak konvergen.

Contoh:

1) Tentukan apakah sistem persamaan linier berikut membentuk matriks diagonal utama.

$x_1 + x_2 + x_3 = 3$
$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9$
$x_1 + 7x_2 + x_3 = 9$

Solusi.

Sistem persamaan linier dapat dibentuk dalam notasi matriks, yakni:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Akan ditunjukkan apakah matriks keofisien membentuk diagonal utama. Untuk itu, tinjau matriks $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ dengan kondisi:

$|a_{11}| = |1| = 1 < |a_{12}| + |a_{13}| = |1| + |1| = 2$
$|a_{22}| = |3| = 3 < |a_{21}| + |a_{23}| = |2| + |4| = 6$
$|a_{33}| = |1| = 1 < |a_{31}| + |a_{32}| = |1| + |7| = 8$

Berdasarkan kondisi tersebut diketahui bahwa matriks keofisien bukan diagonal utama.

Meskipun dilakukan pertukaran baris pada sistem persamaan, matriks keofisien tetap tidak memenuhi kondisi diagonal utama yang disyaratkan.

RANGKUMAN

1. Sistem persamaan linier $Ax = b$ dengan n persamaan dan n peubah dapat dituliskan ke dalam bentuk notasi matriks dan dapat diselesaikan dengan metode langsung (metode analitik) atau metode iterasi (metode numerik).

2. Metode langsung (metode analitik) adalah metode penentuan solusi sistem persamaan linier yang umum digunakan pada sistem persamaan yang tidak terlalu besar. Beberapa metode langsung yang dapat diterapkan, yakni:

   a) Eliminasi Gauss

   Konsep dasar eliminasi Gauss adalah mengubah sistem persamaan linier $Ax = b$ menjadi sistem persamaan segitiga atas $UX = Y$. Pembentukan $Ax = b$ menjadi sistem persamaan segitiga atas $UX = Y$ dapat dilakukan dengan operasi baris elementer (OBE), yaitu:

      i. Pertukarkan dua baris
      ii. Kalikan suatu baris dengan skalar yang tidak nol
      iii. Jumlahkan suatu baris dengan hasil kali pada baris yang lain.

   b) Eliminasi Gauss Jordan

Pada eliminasi Gauss Jordan, matriks koefisien dirubah menjadi matriks identitas, yakni bentuk $Ax = b$ dirubah menjadi bentuk $IX = Y$, dimana I adalah matriks identitas.

c) Eliminasi Gauss Jordan dengan Pivoting

Persamaan pivot (persamaan tumpuan), yakni persamaan pada baris pertama. Proses pivoting, yakni mempertukarkan baris-baris yang ada dalam sistem persamaan linier, sehingga elemen pivot adalah elemen terbesar.

3. Metode iterasi adalah metode numerik untuk mengatasi keterbatasan metode analitik dalam menangani sistem persamaan linier yang besar. Metode iterasi dimulai dari penentuan nilai awal vektor x^0 sebagai suatu penyelesaian awal untuk x. Beberapa metode iterasi yang dapat diterapkan, yakni:

a) Iterasi Jacobi

Proses iterasi Jacobi dilakukan untuk memperoleh nilai hampiran $x_1, x_2, \dots, x_n$ dimulai dengan menentukan tebakan awal untuk nilai x tersebut, yakni $x_i^{(0)}$. Berdasarkan tebakan awal ini akan diperoleh nilai $x_i^{(1)}$ dan iterasi berlanjut hingga diperoleh nilai $x_i^{(k)}$. Langkah-langkah Iterasi Jacobi:

i. Menentukan sistem persamaan.

ii. Menentukan penyelesaian awal/tebakan awal $\left(x_i^{(0)}\right)$

iii. Menentukan iterasi maksimum atau toleransi

iv. Membentuk sistem persamaan menjadi $x_i^{(n)} = \frac{b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(n-1)}}{a_{ii}}$, dimana $n = 1, 2, \dots$, $x_i^{(0)}$adalah tebakan awal, dan $x_i^{(k)}$ adalah nilai hampiran ke-k untuk $k = 1,2, \dots$

v. Iterasi dihentikan jika memenuhi kriteria konvergen, yakni: $\max_{1 \le i \le n} \left| \frac{x_i{}^j - x_i{}^{j-1}}{x_i{}^j} \right| <$ toleransi

vi. Menampilkan hasil

b) Iterasi Gauss Seidel

Iterasi Gauss Seidel merupakan modifikasi dari iterasi Jacobi, yaitu setiap nilai x_i yang baru dihasilkan segera dipakai pada persamaan berikutnya untuk menentukan nilai yang lainnya. Langkah-langkah Iterasi Gauss Seidel, yakni:

i. Menentukan sistem persamaan.

ii. Menentukan penyelesaian awal $\left(x_i^{(0)}\right)$

iii. Menentukan iterasi maksimum atau toleransi

iv. Membentuk sistem persamaan menjadi $x_i^{(k)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}}{a_{ii}}$, dimana $n = 1, 2, \dots$, $x_i^{(0)}$ adalah tebakan awal, dan $x_i^{(k)}$ adalah nilai hampiran ke-k untuk $k = 1,2, \dots$

v. Iterasi dihentikan jika memenuhi kriteria konvergen, yakni: $\max_{1 \le i \le n} \left| \frac{x_i{}^j - x_i{}^{j-1}}{x_i{}^j} \right| <$ toleransi

vi. Menampilkan hasil

4. Iterasi Jacobi dan Gauss Seidel bisa saja tidak konvergen jika matriks tidak diagonal utama. Matriks $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ dikatakan diagonal utama jika jika $|a_{ii}| \ge \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}|$.

LATIHAN

1. Manakah dari sistem persamaan berikut yang memiliki diagonal utama:

   a) $\begin{bmatrix} 12 & 6 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & 13 \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 7 & 5 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

2. Gunakan metode iterasi untuk mentukan solusi sistem persamaan linier berikut dengan nilai awal $[x_1 \quad x_2 \quad x_3] = [1 \quad 2 \quad 1]$.

   $12x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 22$

   $x_1 + 5x_2 + x_3 = 7$

   $2x_1 + 7x_2 - 11x_3 = -2$

3. Tentukan solusi sistem persamaan linier berikut dengan iterasi Jacobi dan iterasi Gauss Seidel dengan $x_i^{(0)} = 1$ dan toleransi 0,5. Kemudian bandingkan hasil yang diperoleh.

   $4x_1 + 2x_2 + x_3 = 11$

   $-x_1 + 2x_2 = 3$

   $2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16$

4. Susunlah suatu formula pada *Microsoft Excel* untuk menerjemahkan langkah-langkah pada iterasi Gauss Siedel! Kemudian tentukan solusi sistem persamaan linier berikut

$4x_1 + x_2 - x_3 = 3$
$x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = -6$
$x_2 + 5x_3 - x_5 + x_6 = -5$
$2x_2 + 5x_4 - x_5 - x_7 - x_8 = 0$
$-x_3 - x_4 + 6x_5 - x_6 - x_8 = 12$
$-x_3 - x_5 + 5x_6 = -12$
$-x_4 + 4x_7 - x_8 = -2$
$-x_4 - x_5 - x_7 + 5x_8 = 2$

5. Dalamsuatu kondisi, ditemukan bahwahubungan antara biaya operasimobilterhadap kecepatanmengikutibentuk fungsi kuadrat. Gunakandata yangditunjukkan di bawah iniuntuk memperoleh suatu sistem persamaan. Kemudian gunakansistem persamaan tersebut untuk menentukanbiaya operasimobilsaatkecepatan 60km/jamdan80 km/jam.

Kecepatan (km/jam)	Biaya operasi per km (dalam ribu)
10	22
20	20
50	20

Petunjuk.$f(x) = ax^2 + bx + c$, dimana x adalah kecepatan dan $f(x)$ adalah biaya operasi.Gunakanlah metode numerik untuk menentukannya.Sertakan alasan penggunaan metode.

6. Suatu perusahaan perumahan meminjam Rp 2.250.000.000,00 dari tiga bank yang berbeda untuk memperluas jangkauan bisnisnya. Suku bunga dari ketiga bank tersebut adalah 5%, 6%, dan 7%. Tentukan berapa pinjaman perusahaan tersebut terhadap masing-masing bank jika bunga tahunan yang harus dibayar perusahaan tersebut adalah Rp 130.000.000,00 dan banyaknya uang yang dipinjam dengan bunga 5% sama dengan dua kali uang yang dipinjam dengan bunga 7%? Gunakanlah metode numerik untuk menentukannya! Sertakan alasan penggunaan metode.

BAB 4
INTERPOLASI

Tujuan:

- Mahasiswa mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, dan sistematis dalam memahami konsep teoretismetode interpolasi.
- Mahasiswamenunjukkan kinerja mandiri dan rasa tanggung jawab dalam menerapkan konsep teoretismetode interpolasi dalam menyelesaikan soal.

"Pembelajaran tidak didapat dari kebetulan semata. Ia harus dicari dengan semangat dan disimak dengan tekun" (Abigail Adams-Ibu Negara Amerika Serikat kedua)

4.1 Polinomial Taylor

Kebanyakan metode-metode numerik yang diturunkan berdasarkan pada penghampiran fungsi ke dalam bentuk polinom (suku banyak). Fungsi yang bentuknya kompleks menjadi lebih sederhana bila dihampiri dengan polinom, karena polinom merupakan bentuk fungsi yang paling mudah dipahami kelakuannya.

Sebuah fungsi dapat diekspansikan menjadi polinomial orde ke-n yang dikenal sebagai Deret Taylor. Deret Taylor merupakan konsep yang berguna untuk menurunkan suatu metode numerik. Deret Taylor memberikan nilai hampiran bagi suatu fungsi pada suatu titik berdasarkan nilai fungsi dan turunannya pada titik yang lain. Deret ini merupakan representasi fungsi matematika sebagai jumlahan tak hingga dari suku-suku yang nilainya dihitung dari turunan fungsi tersebut di suatu titik. Deret ini dapat dianggap sebagai limit polinomial Taylor. Bila deret tersebut terpusat di titik nol, deret tersebut dinamakan sebagai Deret Mclaurin.

Teorema Deret Taylor (Bartle, 2000).Andaikan $n \in \mathbb{N}$, misalkan $I \coloneqq [a, b]$ dan $f: I \to \mathbb{R}$ sedemikian sehingga f dan semua turunannya $f', f'', f''', \ldots, f^{(n)}$ kontinu pada selang I dan $f^{(n+1)}$ ada pada selang $[a, b]$ .Jika $x_0 \in [a, b]$, maka untuk nilai-nilai x di I terdapat titik c di antara x dan $x_0$sedemikian sehingga:

$$\boldsymbol{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} + f^{(n+1)}(c)\frac{(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!}}$$

Suku-suku deret Taylor tidak berhingga banyaknya, sehingga untuk alasan praktis deret Taylor dipotong sampai suku orde tertentu, yakni:

$$\boldsymbol{P_n(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}}$$

Hal ini mengakibatkan adanya suku sisa pada deret Taylor, yakni:

$$\boldsymbol{R_n(x) = P_n(x) - f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}} \,; x_0 \leq c \leq x$$

dimana $\boldsymbol{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)} \leq \frac{(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!} \max_{[x_0,x]} f^{(n+1)}(c)}$

Suku sisa adalah perbedaan antara fungsi dan polinomial hampirannya. Untuk x cukup dekat terhadap x_0, suku sisa haruslah cukup kecil. Suku sisa memberikan galat pemotongan (*truncation error*) jika hanya n buah suku pertama pada deret Taylor yang digunakan untuk menyatakan fungsi (polinomial dipotong hanya sampai orde tertentu).

Contoh:

1) Tentukan polinomial Taylor orde 3 pada titik $x_0 = 0$ untuk $f(x) = (1 + x)^{1/2}$

Solusi.

$f(x) = (1 + x)^{1/2} \leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(1 + x)^{-1/2}$

$\leftrightarrow f''^{(x)} = -\frac{1}{4}(1 + x)^{-3/2}$

$$\leftrightarrow f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}$$

Selanjutnya, $f(x)$ dan turunannya disubtitusi ke persamaan deret Taylor:

$$P_3(x) = \left((1+x_0)^{1/2}\right) + \left(\frac{1}{2}(1+x_0)^{-1/2}\right)(x-x_0) + \left(-\frac{1}{4}(1+x_0)^{-3/2}\right)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \left(\frac{3}{8}(1+x_0)^{-5/2}\right)\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

$$\leftrightarrow P_3(x) = (1+0)^{1/2} + \frac{1}{2}(1+0)^{-1/2}(x) + \left(-\frac{1}{4}(1+0)^{-3/2}\right)\frac{x^2}{2!} + \left(\frac{3}{8}(1+0)^{-5/2}\right)\frac{x^3}{3!}$$

$$\leftrightarrow P_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$

Jadi polinomial Taylor orde 3 pada titik $x_0 = 0$ untuk $f(x) = (1+x)^{1/2}$ adalah $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$

2) Gunakan polinomial pada contoh 1) untuk menentukan hampiran nilai $\sqrt{1,1}$ dan tentukan batas galat dan galatnya!

Solusi.

Berdasarkan contoh 1) diketahui bahwa $f(x) = (1+x)^{1/2}$, karena akan ditentukan hampiran nilai $\sqrt{1,1}$ maka perlu diketahui berapakah nilai x.

$f(x) = (1+x)^{1/2} = \sqrt{1+x}$, karena $\sqrt{1+x} = \sqrt{1{,}1}$ berakibat bahwa $x = 0{,}1$

Menentukan hampiran nilai $\sqrt{1{,}1}$ berarti menentukan hampiran nilai $f(0{,}1)$dengan $f(x) = (1+x)^{1/2}$, yaitu:

$P_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$

$\leftrightarrow P_3(0{,}1) = 1 + \frac{1}{2}(0{,}1) - \frac{1}{8}(0{,}1)^2 + \frac{1}{16}(0{,}1)^3 = 1{,}0488125$

Jadi hampiran nilai $\sqrt{1{,}1}$ adalah 1,0488125

Untuk menentukan batas galat digunakan rumus suku sisa, yakni:

$|R_n(x)| = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}\,; x_0 \leq c \leq x$

$\leftrightarrow |R_3(0{,}1)| = \frac{|f''''(c)|}{4!}(0{,}1 - 0)^4\,; 0 \leq c \leq 0{,}1$

dimana $f(c) = (1+c)^{1/2} \leftrightarrow f''''(c) = \frac{-15}{16}(1+c)^{-7/2}$, sehingga:

$$
\begin{aligned}
|R_3(0{,}1)| &= \frac{\left|\frac{-15}{16}(1+c)^{-7/2}\right|}{4!}(0{,}1)^4 \\
&= \frac{\frac{15}{16}(1+c)^{-7/2}}{24}(0{,}1)^4 \\
&= \frac{15(0{,}1)^4}{384}(1+c)^{-7/2} \\
&= 3{,}91 \times 10^{-6}(1+c)^{-7/2} \\
&\leq 3{,}91 \times 10^{-6} \max_{c \in [0{,}0{,}1]}(1+c)^{-7/2}
\end{aligned}
$$

Perhatikan tabel berikut untuk menentukan nilai

$$\max_{c\in[0{,}0{,}1]}(1+c)^{-7/2}$$

c	$(1+c)^{-7/2}$
0	1
0,01	0,965773
0,02	0,933038
0,03	0,901716
0,04	0,871733
0,05	0,843019
0,06	0,81551
0,07	0,789145
0,08	0,763865
0,09	0,739618
0,1	0,716351
0	1

Berdasarkan tabel, nilai $\max_{c\in[0{,}0{,}1]}(1+c)^{-7/2}$ yang dipilih adalah 1 karena merupakan nila maksimum, sehingga diperoleh:

$|R_3(0{,}1)| \leq 3{,}91 \times 10^{-6} \max_{c\in[0{,}0{,}1]}(1+c)^{-7/2} =$

$3{,}91 \times 10^{-6}(1)$

$|R_3(0{,}1)| \leq 3{,}91 \times 10^{-6}$

Jadi batas galat dari nilai hampiran adalah galat $\leq 3{,}91 \times 10^{-6}$.

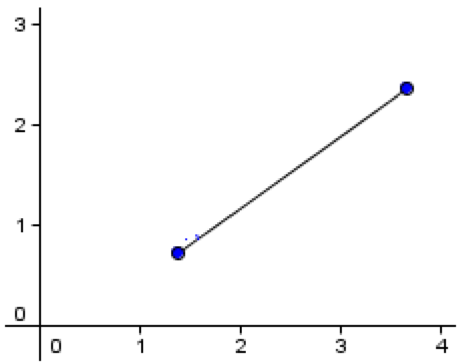
Untuk menentukan galat digunakan $R_n(x) = P_n(x) - f(x)$ dengan $f(x)$ adalah nilai eksak $\sqrt{1,1}$, sehingga diperoleh:

$|R_3(0,1)| = |P_3(0,1) - f(0,1)| = |1{,}0488125 - 1{,}0488088| = 3{,}7 \times 10^{-6}$

Jadi galat nilai hampiran $\sqrt{1,1}$ adalah $3{,}7 \times 10^{-6}$ yang kurang dari batas galat, sehingga nilai hampiran cukup akurat untuk digunakan.

4.2 Interpolasi Polinomial

Polinomial dapat digunakan untuk mencari nilai di antara titik data yang diketahui. Untuk $(n + 1)$ buah titik data, maka akan terdapat suatu polinomial orde n atau kurang yang melalui semua titik. Berikut ini contoh polinomial derajat 1 yang terbentuk dari 2 buah titik. Polinomial derajat 1 ini membentuk suatu garis lurus.



Gambar 4.1 Polinomial Derajat 1

Polinomial berderajat n dituliskan sebagai $f(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$.

Metode yang digunakan untuk mencari suatu nilai di antara titik data yang diketahui adalah interpolasi. Interpolasi (sisipan) menghubungkan titik-titik data diskret dalam suatu cara yang masuk akal sehingga dapat diperoleh taksiran layak dari titik-titik data di antara titik-titik yang diketahui. Jika diketahui dua buah titik (titik x_1 dan titik x_3), maka dapat diketahui perkiraan titik x_2 diantara titik x_1 dan x_3.

4.2.1 Interpolasi Polinomial Newton

Interpolasi polinomial Newton terdiri dari interpolasi linier, interpolasi kuadrat, hingga interpolasi orde n.

1. Interpolasi Polinomial Linier

Interpolasi polinomial linier mengasumsikan bahwa hubungan titik-titik antara dua titik data adalah linier. Pendekatan interpolasi polinomial linier adalah dengan menggunakan fungsi linier $f_1(x)$, yakni menghubungkan dua titik data dengan garis lurus. Misalkan terdapat dua titik data, yaitu $(x_0, f(x_0))$ dan $(x_1, f(x_1))$ maka diperoleh persamaan garis linier yang melalui dua titik melalui persamaan berikut:

$$\frac{f_1(x)-f(x_0)}{f(x_1)-f(x_0)} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

$\leftrightarrow f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x - x_0)$

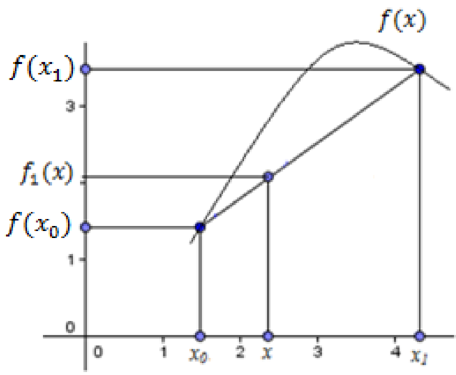
$\leftrightarrow f_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$

Secara umum, persamaan interpolasi polinomial linier adalah:

$$\boldsymbol{f_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)}$$

dengan$a_0 = f(x_0)$ dan $a_1 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

Ilustrasi.



Gambar 4.2 Interpolasi Polinomial Linier

Gambar 4.2 menggambarkan suatu fungsi $f(x)$ yang dihampiri menggunakan polinomial linier dimana diketahui dua titik data pada fungsi $f(x)$, yaitu $(x_0, f(x_0))$ dan $(x_1, f(x_1))$. Selanjutnya, akan dicari nilai diantara dua titik data tersebut menggunakan $f_1(x)$.

Contoh:

1) Tentukan nilai $\sin x$ untuk $x = 0{,}785398$ (x dalam radian) dengan menggunakan metode interpolasi polinomial linier berdasar data: $\sin 0 = 0$ dan $\sin 1{,}5708 = 1$.

Solusi.

Diketahui bahwa $(x_0, f(x_0)) = (0{,}0)$ dan $(x_1, f(x_1)) = (1{,}5708{,}1)$. Nilai hampiran $\sin x$ saat $x = 0{,}785398$ dilakukan dengan menggunakan interpolasi polinomial linier, yaitu:

$f_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$dengan

$a_0 = f(x_0) = 0$

$a_1 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{1-0}{1{,}5708-0} = 0{,}636618$

sehingga diperoleh:

$f_1(x) = 0 + 0{,}636618(x - x_0) \leftrightarrow f_1(x) = 0 + 0{,}636618(0{,}785398 - 0)$

$\leftrightarrow f_1(x) = 0{,}636618(0{,}785398)$

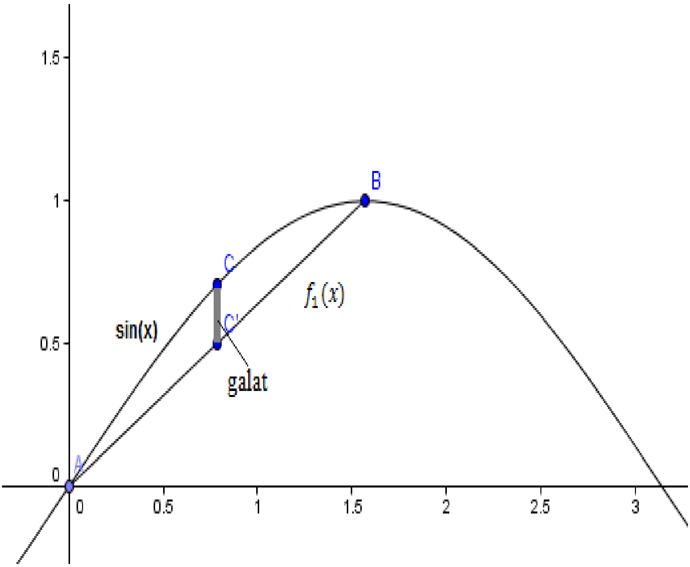
$\leftrightarrow f_1(x) = 0{,}636618(0{,}785398) = 0{,}499999$

Jadi nilai hampiran $\sin x$ untuk $x = 0{,}785398$ (x dalam radian) adalah 0,499999.

Dapat ditentukan bahwa nilai eksak $\sin 0{,}785398 = 0{,}707107$ sehingga terlihat bahwa terjadi galat antara nilai eksak dengan nilai hampiran, yaitu:

$$\varepsilon_t = \frac{0{,}707107 - 0{,}499999}{0{,}707107} \times 100\% = 29{,}3\%$$

Pendekatan polinomial linier dalam menghampiri fungsi $\sin x$ berdasarkan data yang diketahui disajikan pada gambar berikut:



Gambar 4.3 Interpolasi Polinomial Linier untuk Hampiran Fungsi $\sin x$

Gambar 4.3 menggambarkan suatu fungsi $\sin x$ dihampiri menggunakan polinomial linier $f_1(x)$ dimana diketahui dua titik data, yaitu $A(0{,}0)$dan

$B(1{,}5708{,}1)$. Diperoleh nilai hampiran $\sin 0{,}785398 = 0{,}499999$ dengan galat 29,3%.

2. Interpolasi Polinomial Kuadrat

Interpolasi polinomial kuadrat dilakukan dengan menentukan titik-titik di antara tiga titik data dengan menggunakan pendekatan fungsi kuadrat. Misalkan terdapat tiga titik data, yaitu $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, dan $(x_2, f(x_2))$ maka diperoleh persamaan kuadrat:

$$\boldsymbol{f_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)}$$

dengan koefisien-koefisien a_0, a_1, a_2 ditentukan dengan cara berikut:

✓ Untuk menentukan a_0 digunakan titik $x = x_0$ dan $f_2(x) = f(x_0)$, sehingga persamaan menjadi:
$f_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$
$\leftrightarrow f(x_0) = a_0 + a_1(x_0 - x_0) + a_2(x_0 - x_0)(x_0 - x_1)$
$\leftrightarrow \boldsymbol{a_0 = f(x_0)}$

✓ Untuk menentukan a_1 digunakan titik $x = x_1$ dan $f_2(x) = f(x_1)$, , sehingga persamaan menjadi:
$f_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$
$\leftrightarrow f(x_1) = f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) + a_2(x_1 - x_0)(x_1 - x_1)$
$\leftrightarrow f(x_1) = f(x_0) + a_1(x_1 - x_0)$
$\leftrightarrow \boldsymbol{a_1 = \frac{(f(x_1) - f(x_0))}{(x_1 - x_0)}}$

✓ Untuk menentukan a_2 digunakan titik $x = x_2$ dan $f_2(x) = f(x_2)$, sehingga persamaan menjadi:

$f_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$

$\leftrightarrow f(x_2) = f(x_0) + \frac{(f(x_1)-f(x_0))}{(x_1-x_0)}(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$

$\leftrightarrow a_2 = \frac{f(x_2)-f(x_0)-\frac{(f(x_1)-f(x_0))}{(x_1-x_0)}(x_2-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$

$\leftrightarrow a_2 = \frac{(f(x_2)-f(x_0))}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} - \frac{(f(x_1)-f(x_0))}{(x_1-x_0)(x_2-x_1)}$

$\leftrightarrow a_2 = \frac{(f(x_2)-f(x_1))}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} + \frac{(f(x_1)-f(x_0))}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} - \frac{(f(x_1)-f(x_0))}{(x_1-x_0)(x_2-x_1)}$

$\leftrightarrow a_2 = \frac{(f(x_2)-f(x_1))}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} - \frac{(f(x_1)-f(x_0))}{(x_2-x_0)(x_1-x_0)}$

$\leftrightarrow \boldsymbol{a_2} = \frac{\frac{(f(x_2)-f(x_1))}{(x_2-x_1)}-\frac{(f(x_1)-f(x_0))}{(x_1-x_0)}}{(x_2-x_0)}$

Contoh:

1) Tentukan nilai $\sin x$ untuk $x = 0{,}785398$ (x dalam radian) dengan menggunakan metode interpolasi polinomial kuadrat berdasar data: $\sin 0 = 0$, $\sin 0{,}523599 = 0{,}5$, dan $\sin 1{,}5708 = 1$.

Solusi.

Diketahui bahwa $(x_0, f(x_0)) = (0{,}0)$, $(x_1, f(x_1)) = (0{,}523599{,}0{,}5)$, dan $(x_2, f(x_2)) = (1{,}5708{,}1)$. Nilai hampiran $\sin x$ saat $x = 0{,}785398$ dilakukan dengan menggunakan interpolasi polinomial kuadrat, yaitu:

$$f_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

dengan :

$a_0 = f(x_0) = 0$

$a_1 = \frac{(f(x_1) - f(x_0))}{(x_1 - x_0)} = \frac{0,5 - 0}{0,523599 - 0} = 0,95493$

$a_2 = \frac{\frac{(f(x_2) - f(x_1))}{(x_2 - x_1)} - \frac{(f(x_1) - f(x_0))}{(x_1 - x_0)}}{(x_2 - x_0)} =$

$\frac{\frac{(1 - 0,5)}{(1,5708 - 0,523599)} - \frac{(0,5 - 0))}{(0,523599 - 0)}}{(1,5708 - 0)} = -0,30396$

sehingga diperoleh:

$f_2(x) = 0 + 0,95493(x - x_0) - 0,30396(x - x_0)(x - x_1)$

$\leftrightarrow f_2(x) = 0 + 0,95493(0,785398 - 0) - 0,30396(0,785398 - 0)(0,785398 - 0,523599)$

$\leftrightarrow f_2(x) = 0,95493(0,785398) - 0,30396(0,785398)(0,261799)$

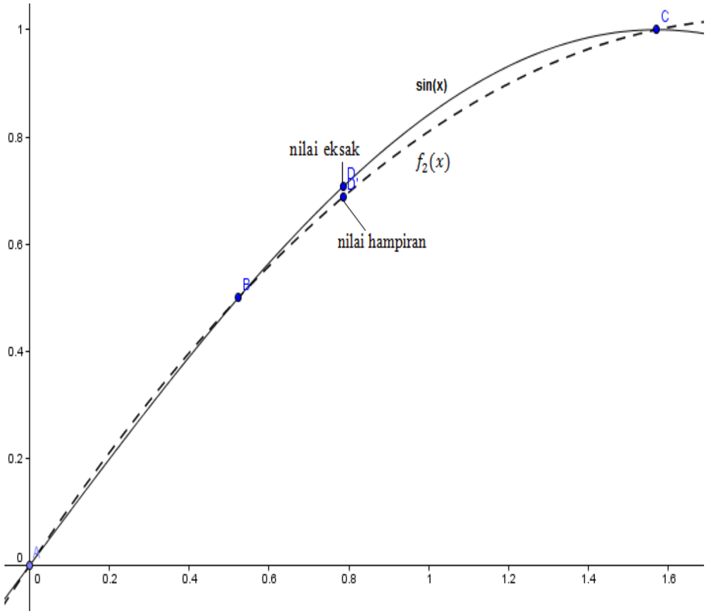
$\leftrightarrow f_2(x) = 0,6875$

Jadi nilai hampiran $\sin x$ untuk $x = 0,785398$ (x dalam radian) adalah 0,6875.

Seperti telah diketahui pada contoh sebelumnya bahwa nilai eksak $\sin 0,785398 = 0,707107$ sehingga dapat ditentukan galat antara nilai eksak dengan nilai hampiran dari interpolasi polinomial kuadrat, yaitu:

$$\varepsilon_t = \frac{0{,}707107 - 0{,}6875}{0{,}707107} \times 100\% = 2{,}77\%$$

Pendekatan polinomial kuadrat dalam menghampiri fungsi $\sin x$ berdasarkan data yang diketahui disajikan pada gambar berikut:



Gambar 4.4 Interpolasi Polinomial Kuadrat untuk Hampiran Fungsi $\sin x$

Gambar 4.4 menggambarkan suatu fungsi $\sin x$ dihampiri menggunakan polinomial kuadrat $f_2(x)$ dimana diketahui tiga titik data, yaitu $A(0{,}0)$, $B(0{,}523599{,}0{,}5)$, dan $C(1{,}5708{,}1)$. Diperoleh nilai hampiran $\sin 0{,}785398 = 0{,}6875$ dengan galat 2,77%.

3. Interpolasi Orde-n (Interpolasi Newton)

Interpolasi orde-n dilakukan dengan menentukan $(n+1)$ titik data, yaitu $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ sehingga terbentuk polinomial orde n. Bentuk polinomial orde n adalah:

$$\boldsymbol{f_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})}$$

dengan koefisien-koefisien $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ditentukan seperti halnya pada interpolasi polinomial kuadrat, sehingga diperoleh:

$$\boldsymbol{a_0 = f(x_0)}$$

$$\boldsymbol{a_1 = \frac{(f(x_1) - f(x_0))}{(x_1 - x_0)} = f[x_1, x_0]}$$

$$\boldsymbol{a_2 = \frac{\frac{(f(x_2) - f(x_1))}{(x_2 - x_1)} - \frac{(f(x_1) - f(x_0))}{(x_1 - x_0)}}{(x_2 - x_0)} = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{(x_2 - x_0)} = f[x_2, x_1, x_0]}$$

$$\boldsymbol{a_n = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2} \ldots, x_0]}{(x_2 - x_0)} = f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]}$$

Koefisien-koefisien $a_0, a_1, \ldots, a_n$ membentuk suatu **beda terbagi hingga (*finite divided diference*)**.

Beda terbagi hingga (*finite divided diference*) merupakan komponen penting dalam penerapan interpolasi Newton yang dapat didefinisikan sebagai berikut:

Misalkan terdapat $x_0, x_1, \dots, x_n$ titik yang berbeda, maka didefinisikan beda terbagi hingga pertama sebagai berikut:

$$\boldsymbol{f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i)-f(x_j)}{(x_i-x_j)} = \frac{f[x_i]-f[x_j]}{(x_i-x_j)}}$$

Dan secara umum beda terbagi hingga-*n*:

$$\boldsymbol{f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_0,x_1,\dots,x_n]-f[x_0,x_1,\dots,x_{n-1}]}{(x_n-x_0)}}$$

Berikut ini contoh beda terbagi hingga pertama, beda terbagi hingga kedua, dan beda terbagi hingga ketiga:

n	x_i	$f(x_i)$	Pertama	kedua	ketiga
0	x_0	$f(x_0)$	$a_1 = f[x_1,x_0] = \frac{f(x_1)-f(x}{(x_1-x_0)}$	$a_2 = f[x_2,x_1,x = \frac{a_{11}-a_1}{(x_2-x_0)}$	$a_3 = f[x_3,x_2,x_1,x = \frac{a_{21}-a_2}{(x_3-x_0)}$
1	x_1	$f(x_1)$	$a_{11} = f[x_2,x_1]$	$a_{21} = f[x_3,x_2,x = \frac{a_{12}-a_{11}}{(x_3-x_1)}$	

			$= \frac{f(x_2)-f(x_1)}{(x_2-x_1)}$		
2	x_2	$f(x_2)$	$a_{12} = f[x_3, x_2] = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{(x_3-x_2)}$		
3	x_3	$f(x_3)$			

Pada tabel terlihat bahwa beda terbagi hingga membentuk persamaan rekursif, yaitu beda terbagi hingga dari orde lebih tinggi dihitung dengan mengambil beda terbagi hingga dari orde lebih rendah.

Contoh:

1) Tentukan nilai $\sin x$ untuk $x = 0{,}785398$ (x dalam radian) dengan menggunakan metode interpolasi Newton berdasar data $\sin 0 = 0$, $\sin 0{,}523599 = 0{,}5$, $\sin 1{,}0472 = 0{,}866027$, dan $\sin 1{,}5708 = 1$

   Solusi.

   Diketahui bahwa $(x_0, f(x_0)) = (0{,}0)$, $(x_1, f(x_1)) = (0{,}523599{,}0{,}5)$, $(x_2, f(x_2)) = (1{,}0472{,}0{,}866027)$, dan $(x_3, f(x_3)) = (1{,}5708{,}1$. Nilai hampiran $\sin x$ saat $x = 0{,}785398$ dilakukan dengan menggunakan interpolasi Newton. Pada contoh ini terbentuk persamaan polinomial orde 3 karena melibatkan 4 titik data, sehingga perlu dicari beda terbagi hingga pertama, beda terbagi hingga kedua, dan beda terbagi hingga ketiga.

n	x_i	$f(x_i)$	Pertama	kedua	ketiga
0	0	0	$a_1 = \frac{0{,}5-0}{(0{,}523599-0)} = 0{,}95493$	$a_2 = \frac{0{,}699056-0{,}95493}{(1{,}0472-0)} = -0{,}24434$	$a_3 = \frac{-0{,}42321-(-0{,}24434)}{(1{,}5708-0)} = -0{,}11387$
1	0,523599	0,5	$a_{11} = \frac{0{,}866027-0{,}5}{(1{,}0472-0{,}523599)} = 0{,}699056$	$a_{21} = \frac{0{,}25587-0{,}69905}{(1{,}5708-0{,}523599} = -0{,}42321$	
2	1,0472	0,866027	$a_{12} = \frac{1-0{,}866027}{(1{,}5708-1{,}0472)} = 0{,}25587$		
3	1,5708	1			

Berdasarkan beda terbagi hingga tersebut diperoleh koefisien-koefisien a_0, a_1, a_2, a_3, yaitu $a_0 = 0$, $a_1 = 0{,}95493$, $a_2 = -0{,}24434$, dan $a_3 = -0{,}11387$

Koefisien-koefisien ini kemudian disubtitusi ke persamaan interpolasi Newton yang dalam hal ini adalah interpolasi polinomial orde-3, yakni:

$f_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$

$\leftrightarrow f_3(x) = 0 + 0{,}95493(0{,}785398 - 0) + (-0{,}24434)(0{,}785398 - 0)(0{,}785398 - 0{,}523599) + (-0{,}11387)(0{,}785398 - 0)(0{,}785398 - 0{,}523599)(0{,}785398 - 1{,}0472)$

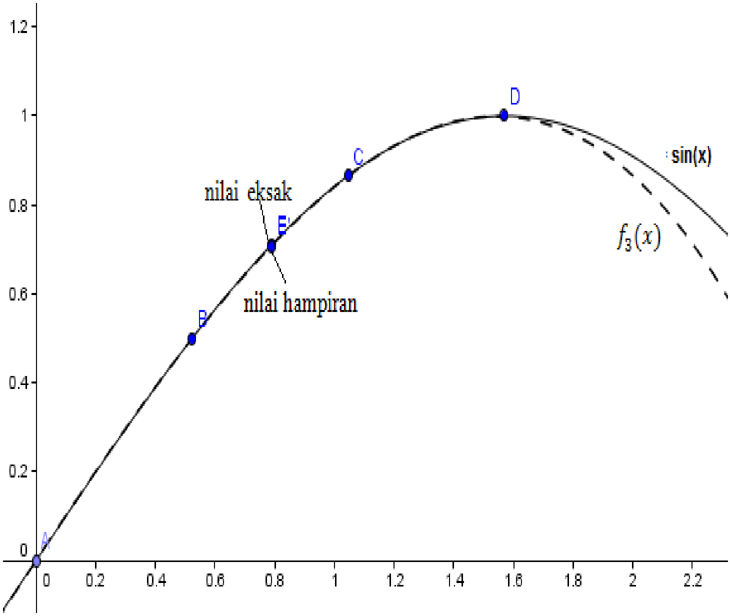
$\leftrightarrow f_3(x) = 0{,}705889$

Jadi nilai hampiran $\sin x$ untuk $x = 0{,}785398$ (x dalam radian) adalah 0,705889.

Diketahui bahwa nilai eksak $\sin 0{,}785398 = 0{,}707107$ sehingga galat antara nilai eksak dengan nilai hampiran dari interpolasi Newton, yaitu:

$\varepsilon_t = \frac{0{,}707107 - 0{,}705889}{0{,}707107} \times 100\% = 0{,}17\%$

Pendekatan polinomial orde-3 dalam menghampiri fungsi $\sin x$ berdasarkan data yang diketahui disajikan pada gambar berikut:



Gambar 4.5 Interpolasi Polinomial Orde-3 untuk Hampiran Fungsi sin x

Gambar 4.5 menggambarkan suatu fungsi $\sin x$ dihampiri menggunakan polinomial orde-3 $f_3(x)$. Diperoleh nilai hampiran $\sin 0{,}785398 = 0{,}705889$ dengan galat $0{,}17\%$. Berdasarkan gambar terlihat bahwa nilai hampiran semakin mendekati nilai eksak.

4.2.2 Interpolasi Polinomial Lagrange

Interpolasi polinomial Lagrange adalah perumusan ulang dari interpolasi polinomial Newton yang menghindari penghitungan beda terbagi hingga. Penurunan bentuk Lagrange secara langsung didapat dari interpolasi polinomial Newton, yakni:

1. Menurut interpolasi Newton orde pertama terdapat bentuk polinomial:

$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x - x_0) \leftrightarrow f_1(x) = f(x_0) + f[x_1, x_0](x - x_0)$

dimana $f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ adalah beda terbagi hingga.

Beda terbagi hingga dapat ditulis sebagai $f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1)}{x_1-x_0} + \frac{f(x_0)}{x_0-x_1}$ yang kemudian disubtitusikan ke bentuk polinomial orde pertama, sehingga diperoleh bentuk polinomial Lagrange orde pertama:

$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1)}{x_1-x_0}(x - x_0) + \frac{f(x_0)}{x_0-x_1}(x - x_0)$

$\leftrightarrow f_1(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{x_1-x_0}f(x_1) + \frac{(x-x_0)}{x_0-x_1}f(x_0)$

$\leftrightarrow f_1(x) = \frac{(x_0-x_1)}{x_0-x_1}f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{x_0-x_1}f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{x_1-x_0}f(x_1)$

$\leftrightarrow \boldsymbol{f_1(x) = \frac{(x-x_1)}{x_0-x_1}f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{x_1-x_0}f(x_1)}$

2. Menurut interpolasi Newton orde kedua terdapat bentuk polinomial:

$$f_2(x) = f(x_0) + \left(\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\right)(x-x_0) + \left(\frac{\left(f(x_2)-f(x_1)\right)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} - \frac{\left(f(x_1)-f(x_0)\right)}{(x_2-x_0)(x_1-x_0)}\right)(x-x_0)(x-x_1)$$

$$\leftrightarrow f_2(x) = \frac{(x-x_1)}{x_0-x_1} f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{x_1-x_0} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$

$$- \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_1) - \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_1-x_0)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_1-x_0)} f(x_0)$$

$$\leftrightarrow f_2(x) = \frac{(x-x_1)}{x_0-x_1} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_0-x_2)(x_0-x_1)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{x_1-x_0} f(x_1)$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) - \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_1-x_0)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$

$$\leftrightarrow f_2(x) = \frac{(x-x_1)}{x_0-x_1} f(x_0)\left[1 + \frac{(x-x_0)}{(x_0-x_2)}\right] + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1)$$

$$\left[(x_1-x_2) + \frac{(x-x_1)(x_1-x_0)}{(x_2-x_0)} - \frac{(x-x_1)(x_1-x_2)}{(x_2-x_0)}\right] + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$

$$\leftrightarrow f_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1)$$

$$\left[\frac{(x_1-x_2)(x_2-x_0)}{(x_2-x_0)} + \frac{(x-x_1)(x_1-x_0)}{(x_2-x_0)} - \frac{(x-x_1)(x_1-x_2)}{(x_2-x_0)}\right] + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$

$$\leftrightarrow f_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) \left[\frac{(x_1-x_2)(x_2-x_0)+(x-x_1)(x_1-x_0)-(x-x_1)(x_1-x_2)}{(x_2-x_0)}\right] + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$

$$\leftrightarrow f_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) \left[\frac{(x_1-x_2)(x_2-x_0)+(x-x_1)[(x_1-x_0)-(x_1-x_2)]}{(x_2-x_0)}\right] + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$

$$\leftrightarrow f_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) \left[\frac{(x_1-x_2)(x_2-x_0)+(x-x_1)(x_2-x_0)}{(x_2-x_0)}\right] + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$

$$\leftrightarrow f_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) \left[\frac{(x_2-x_0)[(x-x_1)+(x_1-x_2)]}{(x_2-x_0)}\right] + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$

$$\leftrightarrow f_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) \left[\frac{(x_2-x_0)(x-x_2)}{(x_2-x_0)}\right] + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$

$$\leftrightarrow \boldsymbol{f_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)}$$

Berdasarkan penajabaran diperoleh bentuk umum interpolasi polinomial Lagrange, yakni:

$$\boldsymbol{f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x).\, f(x_i)}$$

dengan $\boldsymbol{L_i(x) = \prod_{j=0;j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}}$ dan suku sisa: $\boldsymbol{\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)}$

Contoh:

1) Diketahui suatu fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$ dengan titik-titik $x_0 = 2;\ x_1 = 2{,}5;$ dan$x_2 = 4$. Tentukanlah nilai fungsi jika $x = 3$!

   Solusi.

   Pada contoh ini digunakan interpolasi polinomial Lagrange orde-2 karena diketahui 3 titik data, sehingga bentuk persamaan polinomial Lagrange orde-2 adalah:

   $f_2(x) = \sum_{i=0}^{2} L_i(x).\, f(x_i) \leftrightarrow f_2(x) = L_0(x).\, f(x_0) + L_1(x).\, f(x_1) + L_2(x).\, f(x_2)$

   dengan $L_i(x) = \prod_{j=0;j\neq i}^{2} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$ dan $x = 3$, sehingga diperoleh:

   $L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \leftrightarrow L_0(3) = \frac{(3-2{,}5)(3-4)}{(2-2{,}5)(2-4)} = \frac{(0{,}5)(-1)}{(-0{,}5)(-2)} = -0{,}5$

   $L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \leftrightarrow L_1(3) = \frac{(3-2)(3-4)}{(2{,}5-2)(2{,}5-4)} = \frac{(1)(-1)}{(0{,}5)(-1{,}5)} = 1{,}333$

$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \leftrightarrow L_2(3) = \frac{(3-2)(3-2{,}5)}{(4-2)(4-2{,}5)} =$
$\frac{(1)(0{,}5)}{(2)(1{,}5)} = 0{,}167$

Kemudian nilai $L_i(x)$ disubtitusi ke persamaan polinomial Lagrange orde-2:

$f_2(3) = \left(-0{,}5.\frac{1}{2}\right) + \left(1{,}333.\frac{1}{2{,}5}\right) + \left(0{,}167.\frac{1}{4}\right)$
$= (-0{,}5.0{,}5) + (1{,}333.0{,}4) + (0{,}167.0{,}25)$
$= 0{,}32495$

Diperoleh nilai fungsi saat $x = 3$ adalah $0,32495$. Jadi nilai hampiran fungsi saat $x = 3$ adalah $0,32495$.

Diketahui bahwa nilai eksak $f(3) = \frac{1}{3} = 0{,}33333$ sehingga galat antara nilai eksak dengan nilai hampiran dari interpolasi Lagrange, yaitu:

$\varepsilon_t = \frac{0{,}33333-0{,}32495}{0{,}33333} \times 100\% = 2{,}51\%$

2) Tentukan nilai $\sin x$ untuk $x = 0{,}785398$ (x dalam radian) dengan menggunakan metode interpolasi Lagrange berdasar data $\sin 0 = 0$, $\sin 0{,}523599 = 0{,}5$, $\sin 1{,}0472 = 0{,}866027$, dan $\sin 1{,}5708 = 1$
Solusi.
Diketahui 4 titik data, sehingga bentuk persamaan polinomial Lagrange orde-3 adalah:

$f_3(x) = \sum_{i=0}^{3} L_i(x).f(x_i)$
$\leftrightarrow f_3(x) = L_0(x).f(x_0) + L_1(x).f(x_1) +$
$L_2(x).f(x_2) + L_3(x).f(x_3)$

dengan $L_i(x) = \prod_{j=0;j\neq i}^{3} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$ dan $x = 0{,}785398$, sehingga diperoleh:

$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$

$\leftrightarrow L_0(0{,}785398) = \frac{(0{,}785398-0{,}523599)(0{,}785398-1{,}0472)(0{,}785398-1{,}5708)}{(0-0{,}523599)(0-1{,}0472)(0-1{,}5708)} = -0{,}06$

$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$

$\leftrightarrow L_1(0{,}785398) = \frac{(0{,}785398-0)(0{,}785398-1{,}0472)(0{,}785398-1{,}5708)}{(0{,}523599-0)(0{,}523599-1{,}0472)(0{,}523599-1{,}5708)} = 0{,}56$

$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$

$\leftrightarrow L_2(0{,}785398) = \frac{(0{,}785398-0)(0{,}785398-0{,}523599)(0{,}785398-1{,}5708)}{(1{,}0472-0)(1{,}0472-0{,}523599)(1{,}0472-1{,}5708)} = 0{,}56$

$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$

$\leftrightarrow L_3(0{,}785398) = \frac{(0{,}785398-0)(0{,}785398-0{,}523599)(0{,}785398-1{,}0472)}{(1{,}5708-0)(1{,}5708-0{,}523599)(1{,}5708-1{,}0472)} = -0{,}06$

Kemudian nilai $L_i(x)$ disubtitusi ke persamaan polinomial Lagrange orde-3:

$f_3(0{,}785398) = (-0{,}06.0) + (0{,}56.0{,}5) + (0{,}56.0{,}87) + (-0{,}06.1)$

$= (0) + (0{,}28) + (0{,}49) + (-0{,}06)$

$= 0{,}705889$

Jadi nilai hampiran $\sin x$ untuk $x = 0{,}785398$ (x dalam radian) adalah 0,705889.
Diketahui bahwa nilai eksak $\sin 0{,}785398 = 0{,}707107$ sehingga galat antara nilai eksak dengan nilai hampiran dari interpolasi Lagrange, yaitu:
$\varepsilon_t = \frac{0{,}707107-0{,}705889}{0{,}707107} \times 100\% = 0{,}17\%$

RANGKUMAN

1. Sebuah fungsi dapat diekspansikan menjadi polinomial orde ke-n yang dikenal sebagai Deret Taylor.
2. Teorema Deret Taylor.Andaikan $n \in \mathbb{N}$, misalkan $I := [a, b]$ dan $f: I \to \mathbb{R}$ sedemikian sehingga f dan semua turunannya $f', f'', f''', \dots, f^{(n)}$ kontinu pada selang I dan $f^{(n+1)}$ ada pada selang $[a, b]$ .Jika $x_0 \in [a, b]$, maka untuk nilai-nilai x di I terdapat titik c di antara x dan x_0 sedemikian sehingga:
   $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots + f^n(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} + f^{(n+1)}(c)\frac{(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!}$
3. Suku sisa deret Taylor, yakni:
   $R_n(x) = P_n(x) - f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}; x_0 \leq c \leq x$
   dengan $P_n(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots + f^n(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}$ dan
   $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)} \leq \frac{(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!} \max_{[x_0,x]} f^{(n+1)}(c)$
4. Metode yang digunakan untuk mencari suatu nilai di antara titik data yang diketahui adalah interpolasi.

5. Interpolasipolinomial Newton terdiri dari interpolasi linier, interpolasi kuadrat, hingga interpolasi orde n.

a) Interpolasi polinomial linier

Interpolasi polinomial linier mengasumsikan bahwa hubungan titik-titik antara dua titik data adalah linier. Secara umum, persamaan interpolasi polinomial linier adalah $f_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$ dengan $a_0 = f(x_0)$ dan $a_1 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

b) Interpolasi polinomial kuadrat

Interpolasi polinomial kuadrat dilakukan dengan menentukan titik-titik di antara tiga titik data dengan menggunakan pendekatan fungsi kuadrat. Persamaan interpolasi polinomial kuadrat adalah $f_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$ dengan $a_0 = f(x_0), a_1 = \frac{(f(x_1)-f(x_0))}{(x_1-x_0)}, a_2 = \frac{\frac{(f(x_2)-f(x_1))}{(x_2-x_1)} - \frac{(f(x_1)-f(x_0))}{(x_1-x_0)}}{(x_2-x_0)}$

c) Interpolasi orde-n (interpolasi Newton)

Interpolasi orde-n dilakukan dengan menentukan $(n + 1)$ titik data, yaitu $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$ sehingga terbentuk polinom orde n. Bentuk polinom orde n adalah $f_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$ dengan koefisien-koefisien $a_0, a_1, \dots, a_n$ membentuk suatu beda terbagi hingga (*finite divided diference*), yakni:

$$a_0 = f(x_0)$$
$$a_1 = f[x_1, x_0]$$
$$a_2 = f[x_2, x_1, x_0]$$
$$\vdots$$
$$a_n = f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0]$$

Secara umum beda terbagi hingga-*n* dirumuskan dengan:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_0,x_1,\dots,x_n] - f[x_0,x_1,\dots,x_{n-1}]}{(x_n - x_0)}$$

6. Interpolasi polinomial Lagrange

Interpolasi polinomial Lagrange adalah perumusan ulang dari interpolasi polinomial Newton yang menghindari penghitungan beda terbagi hingga. Bentuk umum interpolasi polinomial Lagrange adalah $f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x).f(x_i)$ dengan $L_i(x) = \prod_{j=0;j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$ dan suku sisa: $\frac{(x-x_0)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$.

LATIHAN

1. Tentukan polinomial Taylor orde 3 untuk fungsi $f(x) = (1 - x)^{-2}$ pada titik $x_0 = 0$, dan gunakan polinomial tersebut untuk menentukan nilai hampiran $f(0{,}05)$. Tentukan batas galat dan galatnya!
2. Gunakan aproksimasi hingga orde 4 dari deret Taylor untuk fungsi $f(x) = -0{,}1x^4 - 0{,}15x^3 - 0{,}5x^2 - 0{,}25x + 1{,}2$ pada titik $x_0 = 0$ untuk menentukan hampiran nilai $f(1)$!
3. Berikut ini disajikan nilai untuk fungsi $f(x) = \tan x$ pada beberapa nilai x, yaitu:

x	1	1,1	1,2	1,3
$\tan x$	1,5574	1,9648	2,5722	3,6021

   Gunakan interpolasi polinomial linier untuk menentukan $\tan(1{,}15)$!
4. Berikut ini disajikan nilai untuk fungsi $f(x) = \cos x$ pada beberapa nilai x, yaitu:

x	1	1,1	1,2	1,3
$\cos x$	0,5403	0,4536	0,3624	0,2675

   Gunakan interpolasi polinomial Newton untuk menentukan $\cos(1{,}15)$!
5. Berikut ini disajikan data, yaitu:

x	1	1,3	1,6	1,9	2,2

$f(x)$	0,77	0,62	0,46	0,28	0,11

Gunakan interpolasi polinomial Lagrange untuk menentukan $f(1{,}5)$!

6. Sebuah roket diluncurkan dari darat, kecepatan meluncur disimbolkan dengan $v(t)$ yang diukur pada waktu (t) tertentu. Misalkan dalam suatu pengukuran kecepatan meluncur roket untuk waktu $0 \leq t \leq 30$diperoleh data sebagai berikut:

t (s)	0	10	15	22	25	30
$v(t)$ (m/s)	0	250	350	655	890	910

Tentukanlah kecepatan roket saat $t = 5\ s, t = 20\ s, t = 23\ s$

BAB 5
INTEGRASI NUMERIK

Tujuan:

- Mahasiswa mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, dan sistematis dalam memahami konsep teoretismetode integrasi numerik.
- Mahasiswamenunjukkan kinerja mandiri dan rasa tanggung jawab dalam menerapkan konsep teoretismetode integrasi numerik dalam menyelesaikan soal yang terkait dengan menentukan luas di bawah kurva.

"Start where you are,
use what you have,
do what you can."
(Arthur Ash-
American
professional tennis
player)

Integral tentu $I = \int_a^b f(x)\ dx$ untuk x dan $f(x) \in \mathbb{R}$ pada dasarnya adalah suatu limit jumlahan Riemann dari nilai-nilai fungsi di berhingga $(n + 1)$ titik-titik diskrit, yaitu:
$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i$; dengan $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Penentuan hasil integral tentu dengan menggunakan metode analitik biasanya sulit bahkan ada yang tidak dapat dievaluasi. Oleh karena itu, penentuan hasil integral tentu dan masalah integral yang lebih umum dapat dilakukan melalui penggantian fungsi $f(x)$ dengan suatu fungsi hampiran $f_n(x)$ yang lebih mudah diintegralkan yang dapat dituliskan sebagai berikut:
$\boldsymbol{I = \int_a^b f(x)\ dx \cong \int_a^b f_n(x)\ dx}$ dimana fungsi $f_n(x)$adalah suatu polinomial derajat n yang berbentuk $f_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$.

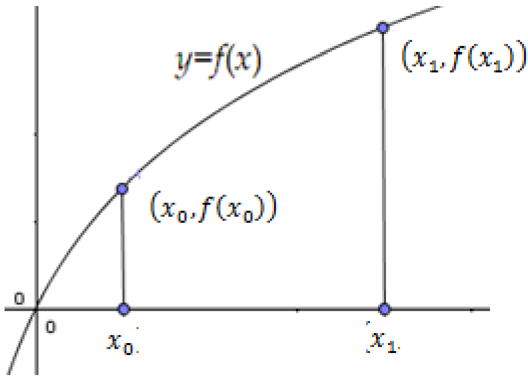
Penggantian fungsi $f(x)$ atau data tertabulasi dengan suatu fungsi hampiran $f_n(x)$ yang lebih mudah diintegralkan merupakan dasar dari rumus ***Newton-Cotes.*** Terdapat beberapa metode numerik yang menerapkan rumus *Newton-Cotes*, diantaranya adalah integrasi aturan trapesium dan integrasi aturan Simpson.

5.1 Integrasi Aturan Trapesium

Integrasi aturan trapesium didasarkan pada interpolasi linier dari fungsi $f(x)$ pada interval $[x_{i-1}, x_i]$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$. Karena integrasi menggunakan polinomial orde 1 sebagai fungsi hampiran, maka integrasi dapat dituliskan sebagai berikut:

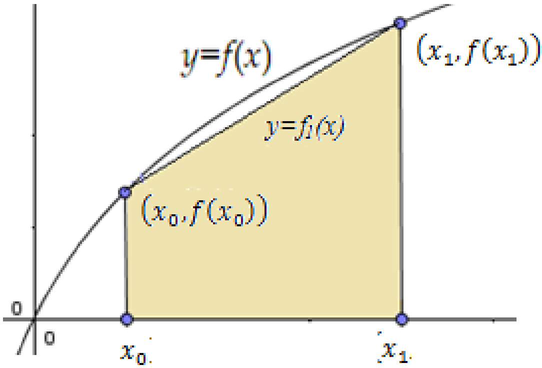
$$I = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\ dx \cong \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_1(x)\ dx \qquad (5.1)$$

Misalkan diketahui suatu fungsi $f(x)$ pada interval $[x_0, x_1]$ yang akan ditentukan integralnya digambarkan sebagai berikut.



Gambar 5.1 Fungsi $f(x)$

Selanjutnya fungsi $f(x)$ diselesaikan dengan menggunakan fungsi hampiran yang berupa polinomial orde 1:



Gambar 5.2 Fungsi Hampiran $f_1(x)$

Berdasarkan Gambar 5.2, fungsi $f_1(x)$ adalah suatu fungsi garis lurus yang melalui dua titik, sehingga persamaannya adalah:

$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x - x_0) \qquad (5.2)$$

Persamaan 5.2 disubtitusi ke persamaan 5.1, sehingga diperoleh:

$$I \cong \int_{x_0}^{x_1} \left[f(x_0) + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x - x_0) \right] dx$$

$$\leftrightarrow I = xf(x_0) + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\frac{1}{2}(x - x_0)^2 \Big|_{x_0}^{x_1}$$

$$\leftrightarrow I = \left[x_1.f(x_0) + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\frac{1}{2}(x_1 - x_0)^2 \right] - \left[x_0.f(x_0) + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\frac{1}{2}(x_0 - x_0)^2 \right]$$

$$\leftrightarrow I = x_1.f(x_0) + \frac{1}{2}\big(f(x_1) - f(x_0)\big)(x_1 - x_0) - x_0.f(x_0)$$

$$\leftrightarrow I = x_1.f(x_0) + \frac{1}{2}\big(x_1.f(x_1) - x_0.f(x_1) - x_1.f(x_0) + x_0.f(x_0)\big) - x_0.f(x_0)$$

$\leftrightarrow I = \frac{1}{2}x_1.f(x_0) - \frac{1}{2}x_0.f(x_0) + \frac{1}{2}x_1.f(x_1) - \frac{1}{2}x_0.f(x_1)$

$\leftrightarrow I = \frac{1}{2}(x_1 - x_0)f(x_0) + \frac{1}{2}(x_1 - x_0)f(x_1)$

$\leftrightarrow I = \frac{1}{2}(x_1 - x_0)[f(x_0) + f(x_1)]$

Menurut polinomial Lagrange, persamaan 5.2 dapat dituliskan sebagai:

$$f_1(x) = \frac{(x-x_1)}{x_0-x_1}f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{x_1-x_0}f(x_1) \qquad (5.3)$$

Persamaan 5.3 disubtitusi ke persamaan 5.1, sehingga diperoleh:

$I \cong \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{(x-x_1)}{x_0-x_1}f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{x_1-x_0}f(x_1)\right] dx$

$\leftrightarrow I = \frac{f(x_0)}{x_0-x_1}\int_{x_0}^{x_1}(x - x_1)\ d(x - x_1) + \frac{f(x_1)}{x_1-x_0}\int_{x_0}^{x_1}(x -$
$x_0)\ d(x - x_0)$

$\leftrightarrow I = \frac{f(x_0)}{x_0-x_1}.\frac{1}{2}(x - x_1)^2 + \frac{f(x_1)}{x_1-x_0}.\frac{1}{2}(x - x_0)^2\Big|_{x_0}^{x_1}$

$\leftrightarrow I = \frac{1}{2}\left[\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}[(x_1 - x_1)^2 - (x_0 - x_1)^2] + \frac{f(b)}{x_1-x_0}[(x_1 -\right.$
$\left.x_0)^2 - (x_0 - x_0)^2]\right]$

$\leftrightarrow I = \frac{1}{2}\left[\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}.-(x_0 - x_1)^2 + \frac{f(x_1)}{x_1-x_0}(x_1 - x_0)^2\right]$

$\leftrightarrow I = \frac{1}{2}[-(x_0 - x_1)f(x_0) + (x_1 - x_0)f(x_1)]$

$\leftrightarrow I = \frac{1}{2}[(x_1 - x_0)f(x_0) + (x_1 - x_0)f(x_1)]$

$\leftrightarrow I = \frac{1}{2}(x_1 - x_0)[f(x_0) + f(x_1)]$

Hampiran nilai integral fungsi $f(x)$ pada interval $[x_0, x_1]$ dapat juga ditinjau berdasarkan Gambar 5.2 yang membentuk suatu trapesium. Nilai integral tersebut akan sama dengan luas trapesium yang dibentuk oleh fungsi $f_1(x)$ pada interval $[x_0, x_1]$.

Diketahui bahwa $\text{Luas trapesium} = \frac{1}{2} \times \text{jumlah sisi sejajar} \times \text{tingg}$, sehingga berdasarkan Gambar 5.2 terlihat bahwa tinggi trapesium $= (x_1 - x_0)$ dan jumlah sisi sejajar $= f(x_0) + f(x_1)$.

Berdasarkan penjabaran ini diperoleh rumus integrasi aturan trapesium:

$$\boldsymbol{I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\ dx \cong \frac{1}{2}[f(x_0) + f(x_1)].(x_1 - x_0)}$$

(5.4)

Galat integrasi aturan trapesium dapat ditentukan melalui suku sisa polinomial yang dalam hal ini digunakan suku sisa polinomial Lagrange orde 1, yakni:

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

$$\leftrightarrow R_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!} f''(c)$$

$$\leftrightarrow R_1(x) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)(x - x_1)\, dx$$

$$\leftrightarrow R_1(x) = \frac{f''(c)}{2} \int_{x_0}^{x_1} (x^2 - x_0 x - x_1 x + x_0 x_1)\ dx$$

$\leftrightarrow R_1(x) = \frac{f''(c)}{2}\left[\int_{x_0}^{x_1} x^2\ dx - \int_{x_0}^{x_1} x(x_0 + x_1)\ dx + \int_{x_0}^{x_1} x_0 x_1\ dx\right]$

$\leftrightarrow R_1(x) = \frac{f''(c)}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{(x_0+x_1)}{2}x^2 + x_0 x_1 x\right]\Big|_{x_0}^{x_1}$

$\leftrightarrow R_1(x) = \frac{f''(c)}{12}[2x^3 - 3(x_0 + x_1)x^2 + 6x_0 x_1 x]|_{x_0}^{x_1}$

$\leftrightarrow R_1(x) = \frac{f''(c)}{12}[2x_1^3 - 2x_0^3 - 3(x_0 + x_1)(x_1^2 - x_0^2) + 6x_0 x_1(x_1 - x_0)]$

$\leftrightarrow R_1(x) = \frac{f''(c)}{12}[2x_1^3 - 2x_0^3 - 3x_0 x_1^2 + 3x_0^3 - 3x_1^3 + 3x_0^2 x_1 + 6x_0 x_1^2 - 6x_0^2 x_1]$

$\leftrightarrow R_1(x) = \frac{f''(c)}{12}[x_0^3 - x_1^3 + 3x_0 x_1^2 - 3x_0^2 x_1]$

$\leftrightarrow R_1(x) = -\frac{f''(c)}{12}[-x_0^3 + x_1^3 - 3x_0 x_1^2 + 3x_0^2 x_1]$

$\leftrightarrow R_1(x) = -\frac{f''(c)}{12}(x_1 - x_0)^3$

Sehingga galat integrasi aturan trapesium adalah:

$\boldsymbol{|\varepsilon_t| = \frac{(x_1-x_0)^3}{12}|f''(c)|; x_0 \leq c \leq x_1}$ dengan $\boldsymbol{f''(c) = \frac{\int_{x_0}^{x_1} f''(x)}{x_1 - x_0}}$ yang merupakan nilai rerata turunan kedua.

Contoh:

1) Tentukan hasil dari $\int_0^2 \sin x\, dx$ dengan menggunakan integrasi aturan trapesium!

   Solusi.

   Diketahui bahwa $f(x) = \sin x$ dengan $x_0 = 0$ dan $x_1 = 2$, sehingga:

$I = \int_0^2 \sin x\, dx \cong \frac{1}{2}[f(0) + f(2)].(2 - 0)$
dimana $f(0) = \sin 0 = 0$dan $f(2) = \sin 2 = 0{,}909$, maka diperoleh:
$I \cong \frac{1}{2}.0{,}909.2 = 0{,}909$
Penentuan galat dapat dilakukan dalam beberapa kondisi, yakni:

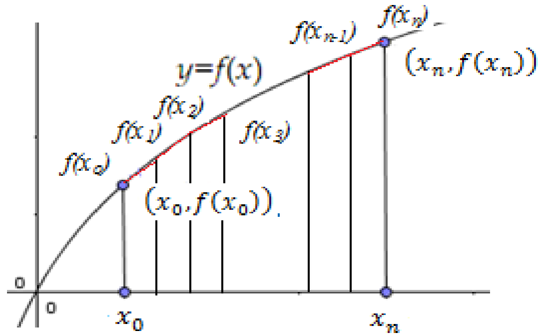
a) Menentukan galat jika nilai eksak diketahui:
Diketahui bahwa nilai eksak:
$\int_0^2 \sin x\, dx = -\cos x|_0^2 = -\cos 2 + \cos 0 = 1{,}416$.
Sehingga galat: $\varepsilon = 1{,}416 - 0{,}909 = 0{,}507$

b) Menentukan galat jika nilai eksak tidak diketahui:
$|\varepsilon_t| = \frac{1}{12}|f''(c)|(2 - 0)^3$
dimana $f''(c) = \frac{\int_a^b f''(x)}{b-a}$
dengan $f'(x) = \cos x \leftrightarrow f''(x) = -\sin x$, sehingga:
$|\varepsilon_t| = \frac{1}{12}.\left|\frac{\int_0^2(-\sin x)}{2}\right|.8$
$= \frac{1}{3}.|\cos x|\Big|_0^2$
$= \frac{1}{3}.|\cos 2 - \cos 0|$
$= \frac{1}{3}.(1{,}416) = 0{,}472$

Berdasarkan perhitungan, diperoleh hampiran nilai $\int_0^2 \sin x\, dx$ adalah 0,909 dengan galat 0,472.

5.2 Integrasi Trapesium dengan *n* Partisi

Integrasi trapesium dengan n partisi bertujuan untuk memperbaiki akurasi integrasi aturan trapesium, yakni dengan membuat partisi pada trapesium (partisi daerah integrasi) dengan lebar yang sama:
Ilustrasi.



Gambar 5.3 Integrasi Trapesium dengan *n* Partisi

Untuk $n+1$ data diperoleh n partisi dengan lebar yang sama, sehingga interval tiap partisi adalah $\boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{x_n - x_0}}{\boldsymbol{n}}$.

Hampiran nilai integral fungsi $f(x)$ pada interval $[x_0, x_n]$ adalah:

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\ dx$$

$$\cong \left[\frac{1}{2}[f(x_0) + f(x_1)].\frac{x_n - x_0}{n}\right] + \left[\frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)].\frac{x_n - x_0}{n}\right] + \cdots$$

$$+\left[\frac{1}{2}[f(x_{n-2})+f(x_{n-1})].\frac{x_n-x_0}{n}\right]+\left[\frac{1}{2}[f(x_{n-1})+f(x_n)].\frac{x_n-x_0}{n}\right]$$

$$\cong \frac{1}{2}\left(\frac{x_n-x_0}{n}\right)\begin{bmatrix}[f(x_0)+f(x_1)]+[f(x_1)+f(x_2)]+\cdots+\\ [f(x_{n-2})+f(x_{n-1})]+[f(x_{n-1})+f(x_n)]\end{bmatrix}$$

$$\cong \left(\frac{x_n-x_0}{2n}\right)[f(x_0)+2f(x_1)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

$$\cong \left(\frac{x_n-x_0}{2n}\right)\left[f(x_0)+2\big(f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1})\big)+f(x_n)\right]$$

$$\cong \left(\frac{x_n-x_0}{2n}\right)[f(x_0)+(2\textstyle\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i))+f(x_n)]$$

Berdasarkan penjabaran, diperoleh bahwa hampiran nilai integral fungsi $f(x)$ pada $[x_0, x_n]$ sama dengan jumlah n partisi trapesium:

$$\boldsymbol{I=\int_{x_0}^{x_n}f(x)\ dx\cong\left(\frac{x_n-x_0}{2n}\right)\left[f(x_0)+\left(2\textstyle\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)\right)+f(x_n)\right]}$$

(5.5)

dimana $x_i = x_0 + i.h$

Galat integrasi aturan trapesium dengan n partisi diperoleh dengan menjumlahkan galat dari masing-masing partisi, yakni:

$$\varepsilon_t=-\frac{(x_n-x_0)^3}{12n^3}\sum_{i=1}^{n}f''(c_i) \qquad (5.6)$$

dengan $f''(c_i)$ adalah turunan kedua pada c_i yang terletak pada partisi ke-i.

Persamaan 5.6 dapat disederhanakan dengan mengestimasi nilai rerata turunan kedua untuk seluruh interval, yakni:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f''(c_i)}{n} \cong \overline{f''} \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} f''(c_i) \approx n.\overline{f''(x)} \qquad (5.7)$$

Persamaan 5.7 disubtitusi ke persamaan 5.6 menjadi:

$$\varepsilon_t = -\frac{(x_n-x_0)^3}{12n^3} n.\overline{f''(x)} \leftrightarrow \varepsilon_t = -\frac{(x_n-x_0)^3}{12n^2}\overline{f''(x)}$$

dimana $\overline{f''(x)} = \frac{\int_{x_0}^{x_n} f''(x)}{x_n-x_0}$ adalah nilai rerata turunan kedua.

Sehingga, galat integrasi trapesium dengan *n* partisi adalah:

$$\boldsymbol{\varepsilon_t = -\frac{(x_n-x_0)^3}{12n^2}\overline{f''(x)}}$$

dengan $\overline{\boldsymbol{f''(x)}} = \frac{\int_{\boldsymbol{x_0}}^{\boldsymbol{x_n}} \boldsymbol{f''}(x)}{\boldsymbol{x_n-x_0}}$ yang merupakan nilai rerata turunan kedua.

Contoh.

1) Tentukan hasil dari $\int_0^2 \sin x\, dx$ dengan menggunakan integrasi aturan trapesium dengan 4 partisi!
   Solusi.
   Diketahui bahwa $f(x) = \sin x$ dengan $x_0 = 0$dan $x_4 = 2$, sehingga interval tiap partisi adalah $h = \frac{x_4-x_0}{4} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$
   Kemudian ditentukan nilai x_i untuk $i = 1,2,3$

$x_1 = x_0 + i.h = 0 + 1.\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}479$

$x_2 = x_0 + i.h = 0 + 2.\frac{1}{2} = 1 \leftrightarrow f(1) = 0{,}841$

$x_3 = x_0 + i.h = 0 + 3.\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \leftrightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = 0{,}997$

Maka:

$I = \int_0^2 \sin x \, dx \cong \left(\frac{x_4 - x_0}{2\times 4}\right)[f(x_0) +$
$(2\sum_{i=1}^{3} f(x_i)) + f(x_4)]$

$I \cong \left(\frac{2-0}{8}\right)\left[f(0) + 2\left(f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right)\right) +\right.$
$\left. f(2)\right]$

$I \cong \left(\frac{1}{4}\right)[0 + 2(0{,}479 + 0{,}841 + 0{,}997) + 0{,}909]$

$I \cong \left(\frac{1}{4}\right)[0 + 2(2{,}317) + 0{,}909] = 1{,}386$

Seperti halnya pada integrasi aturan trapesium, penentuan galat integrasi trapesium dengan 4 partisi dapat dilakukan dalam beberapa kondisi, yakni:

a) Menentukan galat jika nilai eksak diketahui:
Diketahui bahwa nilai eksak:
$\int_0^2 \sin x \, dx = -\cos x|_0^2 = -\cos 2 + \cos 0 =$
$1{,}416$
Sehingga galat: $\varepsilon = 1{,}416 - 1{,}386 = 0{,}03$

b) Menentukan galat jika nilai eksak tidak diketahui:
$\varepsilon_t = -\frac{(2-0)^3}{12(4^2)}\overline{f''(x)} = -\frac{8}{192}\overline{f''(x)}$

dimana $\overline{f''(x)} = \frac{\int_{x_0}^{x_n} f''(x)}{x_n - x_0}$

dengan $f'(x) = \cos x \leftrightarrow f''(x) = -\sin x$, sehingga:

$$\varepsilon_t = -\frac{8}{192} . \left(\frac{\int_0^2 (-\sin x)}{2} \right)$$

$$= -\frac{1}{24} . \cos x |_0^2$$

$$= -\frac{1}{24} . (\cos 2 - \cos 0)$$

$$= -\frac{1}{24} . (-1{,}416) = 0{,}05$$

Berdasarkan perhitungan, diperoleh hampiran nilai $\int_0^2 \sin x \, dx$ adalah 1,386 dengan galat 0,05.

Jika hasil integrasi aturan trapesium dibandingkan dengan hasil integrasi trapesium dengan n partisi, diperoleh bahwa hasil integrasi aturan trapesium dengan $n$partisi lebih mendekati nilai eksak. Semakin banyak partisi yang digunakan, maka nilai hampiran integral akan semakin mendekati nilai eksak.

5.3 Integrasi Aturan Simpson

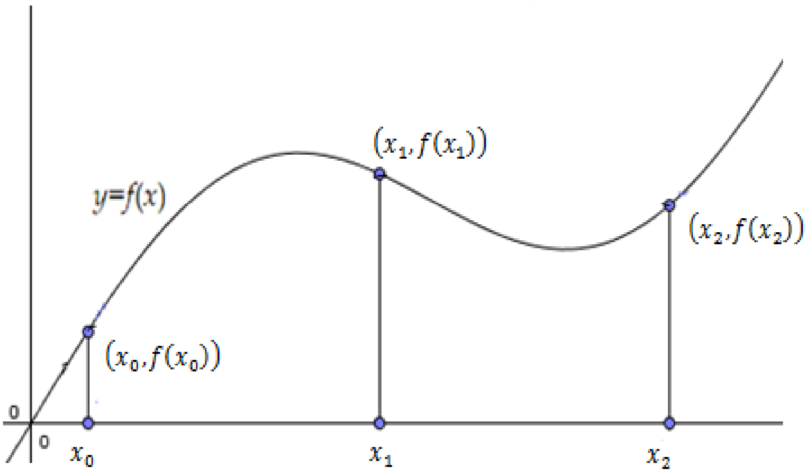
Taksiran yang lebih akurat dari suatu integral diperoleh jika polinomial derajat tinggi digunakan untuk menghubungkan titik-titik diskrit. Penggunaan polinomial derajat tinggi dalam menentukan hampiran nilai integral merupakan prinsip integrasi aturan Simpson. Aturan Simpson mirip dengan aturan trapesium, yaitu keduanya membagi daerah yang akan diintegralkan dalam interval bagian yang kecil dan kemudian menjumlahkan semua integral dari daerah yang dibatasi oleh sumbu yang kecil tersebut. Terdapat beberapa jenis integrasi aturan Simpson bergantung dari derajat polinomial sebagai hampiran fungsi, yakni integrasi aturan 1/3 Simpson dan integrasi aturan 3/8 Simpson.

5.3.1 Integrasi Aturan 1/3 Simpson

Integrasi aturan 1/3 Simpson didasarkan pada interpolasi polinomial orde dua (interpolasi kuadrat) dari fungsi $f(x)$ pada $[x_{i-1}, x_i]$ untuk setiap $i = 1,2, \dots, n.$, sehingga nilai integral fungsi $f(x)$ dituliskan:

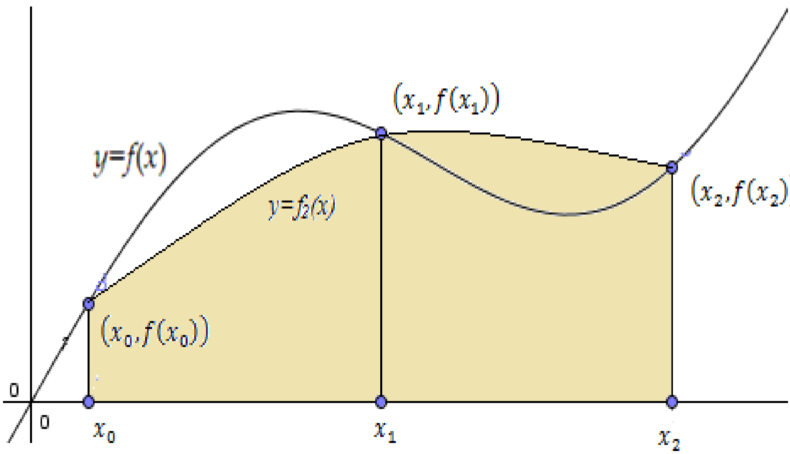
$I = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\ dx \cong \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_2(x)\ dx$ (5.8)

Misalkan diketahui suatu fungsi $f(x)$ pada interval $[x_0, x_2]$ yang akan ditentukan integralnya digambarkan sebagai berikut.



Gambar 5.4 Fungsi $f(x)$ dengan 3 Titik Data

Fungsi $f(x)$ diselesaikan dengan menggunakan fungsi hampiran yang berupa polinomial orde 2:



Gambar 5.5 Fungsi Hampiran $f_2(x)$

Berdasarakan Gambar 5.5 terlihat bahwa fungsi $f_2(x)$ adalah suatu fungsi parabola yang melalui tiga titik, yaitu $\left(x_0, f(x_0)\right), \left(x_1, f(x_1)\right)$, dan$\left(x_2, f(x_2)\right)$dimana $x_1 = \frac{x_0+x_2}{2}$, sehingga berdasarkan pendekatan Taylor orde 2 disekitar titik x_1 didapat persamaan:

$$f_2(x) = f(x_1) + f'(x_1)\left((x - x_1)\right) + f''\left(\frac{(x-x_1)^2}{2}\right)$$

(5.9)

Persamaan 5.9 disubtitusi ke persamaan 5.8, sehingga diperoleh hampiran nilai integral fungsi $f(x)$ pada $[x_0, x_2]$:

$$I \cong \int_{x_0}^{x_2}\left(f(x_1) + f'(x_1)\left((x - x_1)\right) + f''\left(\frac{(x-x_1)^2}{2}\right)\right) dx$$

$$= \frac{1}{3} . \frac{(x_2-x_0)}{2} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

Misalkan $\boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{(x_2-x_0)}}{\boldsymbol{2}}$, diperoleh:

$$\boldsymbol{I = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]}$$

(5.10)

Galat integrasi aturan 1/3 Simpson dirumuskan dengan:

$$\boldsymbol{\varepsilon_t = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(c); x_0 \le c \le x_2} \text{ dengan } \boldsymbol{f^{(4)}(c) = \frac{\int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(x)}{x_2 - x_0}}$$

Contoh.

1) Tentukan hasil dari $\int_0^2 \sin x\, dx$ dengan menggunakan integrasi aturan 1/3 Simpson!

Solusi.

Diketahui bahwa $f(x) = \sin x$ dengan $x_0 = 0$dan $x_2 = 2$, sehingga $x_1 = \frac{0+2}{2} = 1$ dan $h = \frac{(2-0)}{2} = 1$

Hampiran nilai integral diperoleh berdasarkan persamaan 5.10, yaitu:

$$I = \int_0^2 \sin x\, dx \cong \frac{1}{3}[f(0) + 4f(1) + f(2)]$$

dimana $f(0) = \sin 0 = 0$, $f(1) = \sin 1 = 0{,}8415$ dan $f(2) = \sin 2 = 0{,}909$, maka diperoleh:

$$I \cong \frac{1}{3}[0 + 4(0{,}8415) + 0{,}909] = 1{,}425$$

Penentuan galat integrasi aturan 1/3 Simpson dapat dilakukan dalam beberapa kondisi, yakni:

a) Menentukan galat jika nilai eksak diketahui:
Diketahui bahwa nilai eksak:

$$\int_0^2 \sin x\, dx = -\cos x|_0^2 = -\cos 2 + \cos 0 = 1{,}416$$

Sehingga galat: $\varepsilon = |1{,}416 - 1{,}425| = |-0{,}009| = 0{,}009$

b) Menentukan galat jika nilai eksak tidak diketahui:

$$\varepsilon_t = -\frac{(x_2 - x_0)^5}{2880} f^{(4)}(c)$$

dimana $f^{(4)}(c) = \frac{\int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(x)}{x_2 - x_0}$

Dengan $f'(x) = \cos x \leftrightarrow f'(x) = -\sin x \leftrightarrow f'''(x) = -\cos x \leftrightarrow f^{(4)}(x) = \sin x$, sehingga:

$$\varepsilon_t = \left| -\frac{(2-0)^5}{2880} . \frac{\int_{x_0}^{x_2} \sin x dx}{2-0} \right|$$

$$= \left| -\frac{16}{2880} . -\cos x|_0^2 \right|$$

$$= \left| -\frac{16}{90} . (-\cos 2 + \cos 0) \right|$$

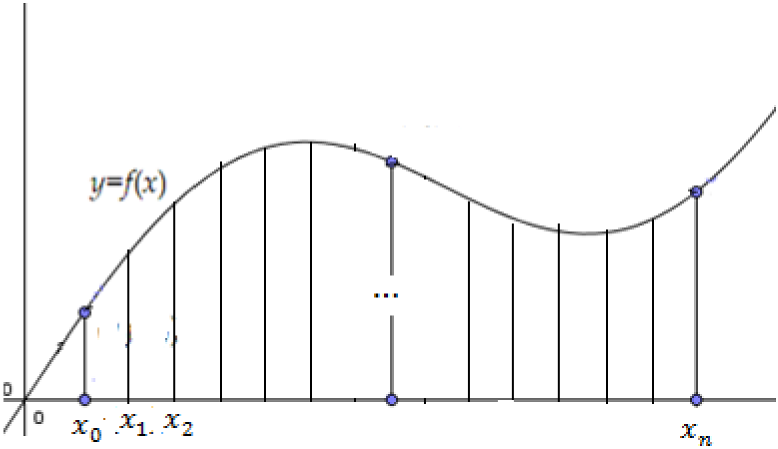
$$= \left| -\frac{16}{2880} . (1{,}416) \right| = |-0{,}00787| = 0{,}00787$$

Bersdasarkan perhitungan, diperoleh hampiran nilai $\int_0^2 \sin x \, dx$ adalah 1,425 dengan galat 0,00787.

5.3.2 Integrasi 1/3 Simpson dengan *n* Partisi

Integrasi 1/3 Simpson dengan *n* partisi bertujuan untuk memperbaiki akurasi integrasi aturan 1/3 Simpson yang dilakukan dengan membuat partisi dengan lebar yang sama. Seperti halnya pada integrasi trapesium dengan *n* partisi, pada integrasi 1/3 Simpson dengan *n* partisi diperoleh *n* partisi dengan lebar yang samauntuk $n + 1$ data, sehingga interval tiap partisi adalah $\boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{x_n - x_0}}{\boldsymbol{n}}$

Ilustrasi.



Gambar 5.6 Integrasi 1/3 Simpson dengan *n* partisi

Hampiran nilai integral fungsi $f(x)$ pada interval $[x_0, x_n]$ sama dengan integrasi total dari 1/3 Simpson, yakni:

$$I \cong \int_{x_0}^{x_2} f_2(x)\ dx + \int_{x_2}^{x_4} f_2(x)\ dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f_2(x)\ dx$$

$$I \cong \left(\frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]\right) + \left(\frac{h}{3}[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)]\right) + \cdots + \left(\frac{h}{3}[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]\right)$$

Diperoleh persamaan integrasi 1/3 Simpson dengan *n* partisi, yakni:

$$\boldsymbol{I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\ dx \cong \left(\frac{x_n - x_0}{3n}\right)\left[f(x_0) + \left(4\sum_{i=1,3,5,\dots}^{n-1} f(x_i)\right) + \left(2\sum_{j=2,4,6,\dots}^{n-2} f(x_j)\right) + f(x_n)\right]}$$

dimana $x_i = x_0 + i.h$

Galat integrasi aturan 1/3 Simpson dengan n partisi diperoleh dengan menjumlahkan galat dari masing-masing partisi:

$$\varepsilon_t = -\frac{(x_n - x_0)^5}{180n^4}\sum_{i=1}^{n} f^{(4)}(c_i)$$

Hasil ini disederhanakan dengan mengestimasi nilai rerata turunan keempat untuk seluruh interval, yakni:

$$\boldsymbol{\varepsilon_t = -\frac{(x_n - x_0)^5}{180n^4}\overline{f^{(4)}(x)}} \text{ dimana } \boldsymbol{\overline{f^{(4)}(x)} = \frac{\int_{x_0}^{x_n} f^{(4)}(x)}{x_n - x_0}}$$

Contoh.

1) Tentukan hasil dari $\int_0^2 \sin x\, dx$ dengan menggunakan integrasi aturan 1/3 Simpson dengan 4 partisi!

   Solusi.

   Diketahui bahwa $f(x) = \sin x$ dengan $x_0 = 0$dan $x_4 = 2$, sehingga interval tiap partisi adalah $h = \frac{x_4 - x_0}{4} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$

   Kemudian ditentukan nilai x_i untuk $i = 1,2,3$

   $x_1 = x_0 + i.h = 0 + 1.\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}479$

   $x_2 = x_0 + i.h = 0 + 2.\frac{1}{2} = 1 \leftrightarrow f(1) = 0{,}841$

$x_3 = x_0 + i.h = 0 + 3.\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \leftrightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = 0{,}997$

Maka:

$I = \int_0^2 \sin x\, dx \cong \left(\frac{x_n - x_0}{3n}\right)\left[f(x_0) + \left(4\sum_{i=1,3,5,\dots}^{n-1} f(x_i)\right) + \left(2\sum_{j=2,4,6,\dots}^{n-2} f(x_j)\right) + f(x_n)\right]$

$I \cong \left(\frac{x_4 - x_0}{3n}\right)\left[f(x_0) + 4\big(f(x_1) + f(x_3)\big) + 2f(x_2) + f(x_4)\right]$

$I \cong \left(\frac{2-0}{12}\right)\left[f(0) + 4\left(f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right)\right) + 2f(1) + f(2)\right]$

$I \cong \left(\frac{1}{6}\right)[0 + 4(0{,}479 + 0{,}997) + (2 \times 0{,}841) + 0{,}909]$

$I \cong \left(\frac{1}{6}\right)[0 + 5{,}904 + 1{,}682 + 0{,}909] = 1{,}416$

Penentuan galat integrasi aturan 1/3 Simpson dapat dilakukan dalam beberapa kondisi, yakni:

a) Menentukan galat jika nilai eksak diketahui:
   Diketahui bahwa nilai eksak:
   $\int_0^2 \sin x\, dx = -\cos x|_0^2 = -\cos 2 + \cos 0 = 1{,}416$
   Sehingga galat: $\varepsilon = 1{,}416 - 1{,}416 = 0$

b) Menentukan galat jika nilai eksak tidak diketahui:
   $\varepsilon_t = -\frac{(x_4 - x_0)^5}{180n^4}\sum_{i=1}^{n} f^{(4)}(\xi_i)$
   dimana $\overline{f^{(4)}(x)} = \frac{\int_{x_0}^{x_4} f^{(4)}(x)}{x_4 - x_0}$

Dengan $f'(x) = \cos x \leftrightarrow f''(x) = -\sin x \leftrightarrow f'''(x) = -\cos x \leftrightarrow f^{(4)}(x) = \sin x$, sehingga:

$$\varepsilon_t = -\frac{(2-0)^5}{180 \times 4^4}\left(\frac{\int_0^2 (-\sin x)}{2}\right)$$

$$= \left|-\frac{32}{46080}. -\cos x|_0^2\right|$$

$$= \left|-\frac{1}{1440}.(-\cos 2 + \cos 0)\right|$$

$$= \left|-\frac{1}{1440}.(1{,}416)\right| = 0{,}000983$$

Bersdasarkan perhitungan, diperoleh hampiran nilai $\int_0^2 \sin x\, dx$ adalah 1,416 dengan galat 0,000983.

Jika hasil integrasi aturan trapesium dengan *n* partisi dibandingkan dengan hasil integrasi aturan 1/3 Simpson dengan *n* partisi, diperoleh bahwa hasil integrasi aturan 1/3 Simpson dengan *n* partisi lebih mendekati nilai eksak.

Umumnya banyak partisi pada integrasi 1/3 Simpson hanya berlaku untuk jumlah partisi genap. Jika diinginkan jumlah partisi ganjil, maka digunakan aturan trapesium atau dengan menggabungkan integrasi 1/3 simpson dengan *n* partisi dan integrasi 3/8 Simpson. Berikut akan dibahas mengenai integrasi 3/8 Simpson.

5.3.3 Integrasi Aturan 3/8 Simpson

Pada integrasi aturan 3/8 Simpson, pendekatan fungsi $f(x)$ diperoleh dari interpolasi polinomial orde tiga yang melalui empat titik, sehingga nilai integral fungsi $f(x)$ dituliskan:

$$I = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\ dx \cong \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_3(x)\ dx$$

Fungsi $f_3(x)$ adalah suatu fungsi yang melalui empat titik, yaitu:

$$\boldsymbol{I = \int_a^b f(x)\ dx \cong \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]}$$

$\big(x_0, f(x_0)\big), \big(x_1, f(x_1)\big), \big(x_2, f(x_2)\big)$, dan$\big(x_3, f(x_3)\big)$. Hampiran nilai integral fungsi $f(x\ )$ pada $[x_0, x_3]$ dengan $\boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{x_3 - x_0}}{\boldsymbol{3}}$ adalah:

Galat Integrasi Aturan 3/8 Simpson adalah:

$\boldsymbol{\varepsilon_t = -\frac{(x_3 - x_0)^5}{6480} f^{(4)}(c); x_0 \le c \le x_3}$ dengan $\boldsymbol{f^{(4)}(c) = \frac{\int_{x_0}^{x_3} f^{(4)}(x)}{x_3 - x_0}}$

Contoh.

1) Tentukan hasil dari $\int_0^2 \sin x\, dx$ dengan menggunakan integrasi aturan 3/8 Simpson!
   Solusi.

Diketahui bahwa $f(x) = \sin x$ dengan $x_0 = 0$dan $x_3 = 2$, sehingga $h = \frac{2-0}{3} = \frac{2}{3}$.
Berdasarkan nilai h, diperoleh nilai $x_1$dan x_2:

$x_1 = x_0 + n.h = 0 + 1.\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \leftrightarrow f\left(\frac{2}{3}\right) = 0{,}618$

$x_2 = x_0 + n.h = 0 + 2.\frac{2}{3} = \frac{4}{3} \leftrightarrow f\left(\frac{4}{3}\right) = 0{,}972$

Hampiran nilai integral berdasarkan integrasi aturan 3/8 Simpson, yaitu:

$I = \int_0^2 \sin x \ dx \cong \frac{3\left(\frac{2}{3}\right)}{8}\left[f(0) + 3f\left(\frac{2}{3}\right) + 3f\left(\frac{4}{3}\right) + f(2)\right]$

dimana $f(0) = \sin 0 = 0$, $f\left(\frac{2}{3}\right) = \sin\frac{2}{3} = 0{,}618$, $f\left(\frac{4}{3}\right) = \sin\frac{4}{3} = 0{,}972$, dan $f(2) = \sin 2 = 0{,}909$, maka diperoleh:

$I \cong \frac{1}{4}[0 + 3(0{,}618) + 3(0{,}972) + 0{,}909] = 1{,}42$

Penentuan galat integrasi aturan 3/8 Simpson dapat dilakukan dalam beberapa kondisi, yakni:

a) Menentukan galat jika nilai eksak diketahui:
Diketahui bahwa nilai eksak:
$\int_0^2 \sin x \, dx = -\cos x|_0^2 = -\cos 2 + \cos 0 = 1{,}416$
Sehingga galat: $\varepsilon = |1{,}416 - 1{,}42| = |-0{,}004| = 0{,}004$

b) Menentukan galat jika nilai eksak tidak diketahui:

$\varepsilon_t = -\frac{(x_3 - x_0)^5}{6480} f^{(4)}(c)$

dimana $f^{(4)}(c) = \frac{\int_{x_0}^{x_3} f^{(4)}(x)}{x_3 - x_0}$

dengan $f'(x) = \cos x \leftrightarrow f''(x) = -\sin x \leftrightarrow f'''(x) = -\cos x \leftrightarrow f^{(4)}(x) = \sin x$, sehingga:

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= \left|-\frac{(2-0)^5}{6480} . \frac{\int_0^2 \sin x dx}{2-0}\right| \\ &= \left|-\frac{32}{6480} . -\cos x|_0^2\right| \\ &= \left|-\frac{32}{6480} . (-\cos 2 + \cos 0)\right| \\ &= \left|-\frac{32}{6480} . (1{,}416)\right| = |-0{,}007| = 0{,}007\end{aligned}$$

Berdasarkan perhitungan, diperoleh hampiran nilai $\int_0^2 \sin x \, dx$ adalah 1,42 dengan galat 0,007.

RANGKUMAN

1. Penentuan nilai integral fungsi dapat dilakukan dengan penggantian fungsi $f(x)$ dengan suatu fungsi hampiran $f_n(x)$ yang lebih mudah diintegralkan yang dituliskan dengan $I = \int_a^b f(x)\ dx \cong \int_a^b f_n(x)\ dx$ dimana fungsi $f_n(x)$adalah suatu polinomial derajat n.
2. Integrasi aturan trapesium didasarkan pada interpolasi polinomial linier. Rumus integrasi aturan trapesium adalah $I = \frac{1}{2}[f(x_0) + f(x_1)].(x_1 - x_0)$. Galat integrasi aturan trapesium adalah $|\varepsilon_t| = \frac{(x_1-x_0)^3}{12}|f''(c)|; x_0 \leq c \leq x_1$ dengan $f''(c) = \frac{\int_{x_0}^{x_1} f''(x)}{x_1-x_0}$ yang merupakan nilai rerata turunan kedua.
3. Integrasi trapesium dengan n partisi bertujuan untuk memperbaiki akurasi integrasi aturan trapesium dengan membuat partisi pada trapesium (partisi daerah integrasi) dengan lebar yang sama. Rumus integrasi trapesium dengan n partisi adalah $I = \left(\frac{x_n-x_0}{2n}\right)[f(x_0) + (2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)) + f(x_n)]$. Galat integrasi aturan trapesium dengan n partisi adalah $\varepsilon_t =$

$-\frac{(x_n-x_0)^3}{12n^2}\overline{f''(x)}$ dengan $\overline{f''(x)} = \frac{\int_{x_0}^{x_n} f''(x)}{x_n-x_0}$ yang merupakan nilai rerata turunan kedua.

4. Integrasi aturan Simpson menggunakan polinomial derajat tinggi dalam menentukan hampiran nilai integral. Terdapat beberapa jenis integrasi aturan Simpson bergantung dari derajat polinomial sebagai hampiran fungsi, yakni:
   a) Integrasi aturan 1/3 Simpson

      Integrasi aturan 1/3 Simpson didasarkan pada interpolasi polinomial orde dua. Rumus integrasi aturan 1/3 Simpson adalah $I = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$ dengan $h = \frac{(x_2-x_0)}{2}$ dan $x_1 = \frac{x_0+x_2}{2}$. Galat integrasi aturan 1/3 Simpson dirumuskan dengan $\varepsilon_t = -\frac{h^5}{90}f^{(4)}(c); x_0 \le c \le x_2$ dengan $f^{(4)}(c) = \frac{\int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(x)}{x_2-x_0}$
   b) Integrasi 1/3 Simpson dengan *n* partisi

      Integrasi 1/3 Simpson dengan *n* partisi bertujuan untuk memperbaiki akurasi integrasi aturan 1/3 Simpson yang dilakukan dengan membuat partisi dengan lebar yang sama. Rumus integrasi 1/3 Simpson dengan *n* partisi adalah $I = \left(\frac{x_n-x_0}{3n}\right)\left[f(x_0) + \left(4\sum_{i=1,3,5,\ldots}^{n-1} f(x_i)\right) + \left(2\sum_{j=2,4,6,\ldots}^{n-2} f(x_j)\right) + f(x_n)\right]$. Galat integrasi aturan

1/3 Simpson dengan n, yakni: $\varepsilon_t = -\frac{(x_n - x_0)^5}{180n^4}\overline{f^{(4)}(x)}$ dimana $\overline{f^{(4)}(x)} = \frac{\int_{x_0}^{x_n} f^{(4)}(x)}{x_n - x_0}$

c) Integrasi aturan 3/8 Simpson

Integrasi aturan 3/8 Simpson didasarkan pada interpolasi polinomial orde tiga yang melalui empat titik. Rumus integrasi aturan 3/8 Simpson adalah $I = \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$dengan $h = \frac{x_3 - x_0}{3}$. Galat integrasi aturan 3/8 Simpson, yakni $\varepsilon_t = -\frac{(x_3 - x_0)^5}{6480} f^{(4)}(c); x_0 \leq c \leq x_3$ dengan $f^{(4)}(c) = \frac{\int_{x_0}^{x_3} f^{(4)}(x)}{x_3 - x_0}$

LATIHAN

1. Tentukan hasil dari $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ dengan menggunakan integrasi aturan trapesium dan integrasi trapesium dengan 4 partisi. Kemudian bandingkan hasilnya.
2. Tentukan hasil dari $\int_0^1 2\cos x^2\, dx$ dengan menggunakan integrasi aturan 1/3 Simpson, integrasi 1/3 Simpson dengan 4 partisi, dan integrasi aturan 3/8 Simpson. Kemudian bandingkan hasilnya.
3. Tentukan hasil dari $\int_1^3 \frac{1}{x} dx$ dengan menggunakan integrasi 1/3 Simpson dengan 4 partisi dan 8 partisi. Kemudian bandingkan hasilnya.
4. Apakah metode yang tepat digunakan untuk menentukan luas di bawah kuva dimana kurva dibentuk berdasarkan data pada tabel berikut.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y	23	19	14	11	12,5	16	19	20	20

Tentukan nilai hampiran dan galatnya.

BAB 6
SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL

Tujuan:

- Mahasiswa mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, dan sistematis dalam memahami konsep teoretismetode numerik yang terkait dengan penentuan solusi Persamaan Diferensial.
- Mahasiswa menunjukkan kinerja mandiri dan rasa tanggung jawab dalam menerapkan konsep teoretismetode numerik dalam menyelesaikan soal yang terkait dengan menentukan solusi Persamaan Diferensial.

"We all need people who will give us feedback. That's how we improve."
(Bill Gates-pendiri Microsoft)

Persamaan diferensial (PD) adalah suatu persamaan yang mengandung turunan fungsi dengan jumlah variabel bebas adalah satu. Bentuk baku PD orde satu dengan nilai awal, yaitu:

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, dimana nilai awal $y(x_0) = y_0$

PD orde satu yang tidak mengikuti bentuk baku harus ditulis ulang menjadi bentuk persamaan seperti di atas agar dapat diselesaikan secara numerik.

Solusi persamaan diferensial adalah suatu fungsi yang memenuhi persamaan diferensial dan juga memenuhi kondisi awal yang diberikan pada persamaan tersebut.Dalam penyelesaian persamaan diferensial secara analitik biasanya dicari solusi umum yang mengandung konstanta sebarang dan kemudian mengevaluasi konstanta tersebut sedemikian sehingga hasilnya sesuai dengan kondisi awal.Untuk mendapatkan solusi tunggal diperlukan informasi tambahan, misalnya nilai $y(x)$ dan/atau turuannya pada nilai x tertentu. Untuk persamaan orde n biasanya diperlukan n kondisi untuk mendapatkan solusi tunggal $y(x)$. Apabila semua n kondisi diberikan pada nilai yang sama (misalnya x_0), maka permasalahan disebut dengan **masalah nilai awal**. Apabila dilibatkan lebih dari satu nilai x, permasalahan disebut dengan **masalah nilai batas**.

Solusi persamaan diferensial secara numerik adalah berupa tabel nilai-nilai numerik dari fungsi untuk berbagai variabel bebas. Penyelesaian suatu persamaan diferensial dilakukan pada titik-titik yang ditentukan secara berurutan.Untuk mendapatkan hasil yang lebih teliti maka jarak (interval) antara titik-titik yang berurutan tersebut dibuat semakin kecil.Solusi persamaan diferensial diperoleh dengan mencari nilai y sebagai fungsi dari x.

Untuk menentukan solusi persamaan diferensial secara numerik digunakan kemiringan kurva. Persamaan diferensial memberikan kemiringan kurva pada setiap titik sebagai fungsi x dan y. Hitungan dimulai dari nilai awal yang diketahui, misalnya di titik (x_0, y_0) kemudian dihitung kemiringan kurva di titik tersebut dan diteruskan dengan membuat interval kecil pada garis singgung tersebut. Apabila interval adalah h, maka hitungan sampai pada titik baru $x_1 = x_0 + h$ dan dari kemiringann garis singgung. Secara umum, rumus menentukan nilai x adalah:

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{r+1}} = \boldsymbol{x_r} + \boldsymbol{h} \leftrightarrow \textbf{nilai baru}$$
$$= \textbf{nilai lama}$$
$$+ (\textbf{kemiringan} \times \textbf{ukuran langkah})$$

Sehingga berdasarkan persamaan diferensial akan diperoleh nilai baru y, yaitu y_1. Prosedur ini diulangi lagi untuk mendapatkan nilai y selanjutnya.

Berikut ini disajikan contoh penentuan solusi persamaan diferensial secara analitik.

Contoh:
Tentukan solusi persamaan diferensial berikut dengan nilai awal $y(0) = 1$

$\frac{dy}{dx} = \sin x$

Solusi.

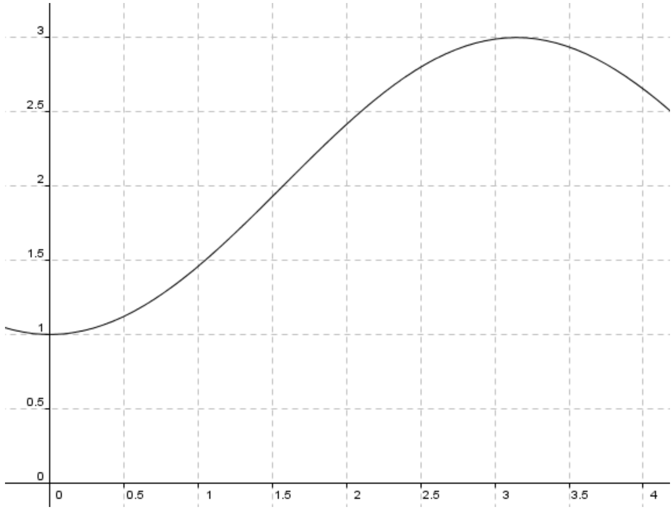
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \sin x \; &\leftrightarrow dy = \sin x \, dx \\ &\leftrightarrow \int dy = \int \sin x \, dx \\ &\leftrightarrow y + C1 = -\cos x + C2 \\ &\leftrightarrow y = C - \cos x, \text{ dengan } C = C2 - C1 \end{aligned}$$

Untuk $y(0) = 0$ diperoleh $y = C - \cos x \leftrightarrow 1 = C - \cos 0 \leftrightarrow C = 2$

Sehingga diperoleh solusi unik/tunggal $y = 2 - \cos x$
Jika ingin diketahui solusi persamaan pada $0 \leq x \leq 4$, maka dapat diihat pada tabel berikut:

x	$y = 2 - \cos x$
0	1
1	1,459698
2	2,416147
3	2,989992
4	2,653644

Berdasarakan tabel, fungsi $y = 2 - \cos x$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 6.1 Fungsi $y = 2 - \cos x$ pada $0 \leq x \leq 4$

Berdasarkan contoh terlihat bahwa pada metode analitik nilai awal berfungsi untuk memperoleh solusi yang unik, sedangkan pada metode numerik nilai awal berfungsi untuk memulai iterasi. Berikut ini disajikan beberapa metode numerik dalam menentukan solusi persamaan diferensial.

6.1 Metode Euler

Metode Euler adalah salah satu metode numerik untuk menentukan solusi persamaan diferensial orde satu yang berbentuk $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ dengan nilai awal $y(x_0) = y_0$. Konsep metode ini didasarkan pada deret Taylor, yakni:

$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{(x_{i+1}-x_i)}{1!} y'(x_i)$
$\leftrightarrow y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i)$ dimana $h = x_{i+1} - x_i$

(6.1)

Berdasarkan persamaan 6.1, terlihat bahwa penentuan nilai $y(x_{i+1})$ didasarkan pada kemiringan garis yang merupakan turunan $y(x_i)$. Oleh karena itu pada metode Euler, turunan dalam persamaan diferensial diganti dengan suatu turunan numerik. Metode Euler menghampiri turunan pertama di $x = x_i$ dengan persamaan:
$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i} = \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x} \approx \boldsymbol{f(x_i, y_i)}$ dimana $y(x_i) = y_i$ adalah hampiran nilai y di x_i, sehingga persamaan 6.1 menjadi:

$$\boldsymbol{y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + h.f(x_i, y_i)}; i = 0,1,2, \ldots$$

(6.2)

Persamaan 6.2 merupakan rumus metode Euler yang menghasilkan barisan numerik. Penggunaan persamaan 6.2 dilakukan setelah penentuan titik-titik dalam jarak yang sama di dalam interval $[a, b]$, yaitu dengan menerapkan $x_i = x_0 + i.h$ untuk $i = 0,1,2, \ldots$ dan $h = \frac{x_n - x_0}{n}$ yang merupakan jarak antar titik (lebar). Selanjutnya, galat metode Euler dapat ditentukan dengan rumus $\boldsymbol{\varepsilon_t = \frac{h^2}{2} y''(c_n)}$ dengan $\boldsymbol{x_i \le c \le x_{i+1}}$ maupun dengan menerapkan rumus galat relatif.

Metode Euler memiliki kelemahan, yakni metode ini memberikan hampiran solusi yang kurang baik. Namun metode ini cukup membantu untuk memahami gagasan dasar metode penyelesaian PD dengan orde yang lebih tinggi.

Contoh:

1) Gunakan metode Euler untuk menentukan solusi numerik dari PD orde satu
$\frac{dy}{dx} = \sin x$
dimana $0 \le x \le 4; y(0) = 1$ dengan $h = 0{,}5$ dan $h = 0{,}25$
Solusi Numerik 1.
   - ✓ Diketahui: $\frac{dy}{dx} = \sin x \approx f(x_i, y_i)$
   - ✓ Lebar tiap titik data: $h = 0{,}5$
   - ✓ Titik-titik iterasi:

$x_i = x_0 + i.h \leftrightarrow x_0 = 0$
$\leftrightarrow x_1 = x_0 + (1 \times 0{,}5) = 0 + 0{,}5 = 0{,}5$
$\leftrightarrow x_2 = x_0 + (2 \times 0{,}5) = 0 + 1 = 1$
$\leftrightarrow x_3 = x_0 + (3 \times 0{,}5) = 0 + \frac{3}{2} = 1{,}5$

$\leftrightarrow x_4 = x_0 + (4 \times 0{,}5) = 0 + 2 = 2$

$\leftrightarrow x_5 = x_0 + (5 \times 0{,}5) = 0 + \frac{5}{2} = 2{,}5$

$\leftrightarrow x_6 = x_0 + (6 \times 0{,}5) = 0 + 3 = 3$

$\leftrightarrow x_7 = x_0 + (7 \times 0{,}5) = 0 + \frac{7}{2} = 3{,}5$

$\leftrightarrow x_8 = x_0 + (8 \times 0{,}5) = 0 + 4 = 4$

✓ Solusi numerik: $y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + h.f(x_i, y_i)$

Untuk $i = 0$ diperoleh:

$y(x_1) \approx y(x_0) + h.f(x_0, y_0)$

$\leftrightarrow y(0{,}5) \approx y(0) + h.f(0{,}1)$

dimana $\frac{dy}{dx} \approx f(x_i, y_i) = f(x_0, y_0) = f(0{,}1) = \sin 0 = 0$, maka:

$\leftrightarrow y(0{,}5) \approx 1 + (0{,}5.0) = 1$

Sehingga $y(0{,}5) = y_1 = y(x_1) = 1$

Untuk $i = 1$ diperoleh:

$y(x_2) \approx y(x_1) + h.f(x_1, y_1)$

$\leftrightarrow y(1) \approx y(0{,}5) + h.f(0{,}5{,}1)$

dimana $f(x_1, y_1) = f(0{,}5{,}1) = \sin 0{,}5 = 0{,}48$, maka:

$\leftrightarrow y(1) \approx 1 + (0{,}5.0{,}48) = 1{,}24$

Sehingga $y(1) = y(x_2) = y_2 = 1{,}24$

Untuk $i = 2$ diperoleh:

$y(x_3) \approx y(x_2) + h.f(x_2, y_2)$
$\leftrightarrow y(1{,}5) \approx y(1) + h.f(1{,}1{,}24)$
dimana $f(x_2, y_2) = f(1{,}1{,}24) = \sin 1 = 0{,}84$, maka:
$\leftrightarrow y(1{,}5) \approx 1{,}24 + (0{,}5.0{,}84) = 1{,}66$
Sehingga $y(1{,}5) = y(x_3) = y_3 = 1{,}6$

Solusi Numerik 2.

- ✓ Diketahui: $\frac{dy}{dx} = \sin x \approx f(x_i, y_i)$
- ✓ Lebar tiap titik data: $h = 0{,}25$
- ✓ Titik-titik iterasi:

$x_i = x_0 + i.h \leftrightarrow x_0 = 0$
$\leftrightarrow x_1 = x_0 + (1 \times 0{,}25) = 0 + 0{,}25 = 0{,}25$
$\leftrightarrow x_2 = x_0 + (2 \times 0{,}25) = 0 + 0{,}5 = 0{,}5$
$\leftrightarrow x_3 = x_0 + (3 \times 0{,}25) = 0 + 0{,}75 = 0{,}75$
$\vdots$
$\leftrightarrow x_{16} = x_0 + (16 \times 0{,}25) = 0 + 4 = 4$

- ✓ Solusi numerik: $y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + h.f(x_i, y_i)$

Untuk $i = 0$ diperoleh:

$y(x_1) \approx y(x_0) + h.f(x_0, y_0)$
$\leftrightarrow y\left(\frac{1}{4}\right) \approx y(0) + h.f(0{,}1)$

dimana $\frac{dy}{dx} \approx f(x_i, y_i) = f(x_0, y_0) = f(0{,}1) = \sin 0 = 0$, maka:

$\leftrightarrow y(0{,}25) \approx 1 + (0{,}25.0) = 1$

Sehingga $y(0{,}25) = y_1 = y(x_1) = 1$

Untuk $i = 1$ diperoleh:

$y(x_2) \approx y(x_1) + h.f(x_1, y_1)$

$\leftrightarrow y(0{,}5) \approx y(0{,}25) + h.f(0{,}25{,}1)$

dimana $f(x_1, y_1) = f(0{,}25{,}1) = \sin 0{,}25 = 0{,}25$

$\leftrightarrow y(0{,}5) \approx 1 + (0{,}25.0{,}25) = 1{,}06$

Sehingga $y(0{,}5) = y(x_2) = y_2 = 1{,}06$

Untuk $i = 2$ diperoleh:

$y(x_3) \approx y(x_2) + h.f(x_2, y_2)$

$\leftrightarrow y(0{,}75) \approx y(0{,}5) + h.f(0{,}5{,}1{,}06)$

dimana $f(x_2, y_2) = f(0{,}5{,}1{,}06) = \sin 0{,}5 = 0{,}48$, maka:

$\leftrightarrow y(0{,}75) \approx 1{,}06 + (0{,}25.0{,}48) = 1{,}18$

Sehingga $y(0{,}75) = y(x_3) = y_3 = 1{,}18$

Penghitungan galat untuk $h = 0{,}5$ dan $h = 0{,}25$ dilakukan dengan menggunakan rumus galat relatif $|\varepsilon_t| = \left|\frac{\text{nilai eksak} - \text{nilai hampiran}}{\text{nilai eksak}}\right| \times 100\%$

Proses perhitungan pada solusi 1 dan solusi 2 diteruskan sehingga diperoleh hasil berikut:

x	y_{eksak}	$h = 0{,}5$		$h = 0{,}25$	
		y_{euler}	*Galat* (%)	y_{euler}	*Galat* (%)
0	1	1		1	
0,25	1,03			1	3,02

0,5	1,12	1	10,91	1,06	5,40
0,75	1,27			1,18	6,83
1	1,46	1,24	15,07	1,35	7,37
1,25	1,68			1,56	7,25
1,5	1,93	1,66	13,93	1,80	6,71
1,75	2,18			2,05	5,93
2	2,42	2,16	10,63	2,30	5,01
2,25	2,63			2,52	4,02
2,5	2,80	2,61	6,69	2,72	3,01
2,75	2,92			2,87	1,97
3	2,99	2,91	2,57	2,96	0,94
3,25	2,99			3,00	0,10
3,5	2,94	2,98	1,61	2,97	1,15
3,75	2,82			2,88	2,20
4	2,65	2,81	5,83	2,74	3,24

Dengan menggunakan h yang berbeda, diperoleh nilai yang berbeda juga. Penggunaan h yang lebih kecil akan memberikan hasil yang lebih teliti. Hal ini merupakan konsep dasar pada metode Euler, yakni h yang semakin kecil akan memberikan ketelitian hasil yang lebih baik.

6.2 Metode Runge Kutta

Metode Runge Kutta adalah metode yang memberikan ketelitian hasil yang lebih baik dibandingkan metode Euler. Secara umum, formula metode Runge Kutta adalah:

$y(x_{i+1}) = y(x_i) +$
$h.F(x_i, y_i; h)$

(6.3)
Dimana $F(x_i, y_i; h)$ adalah fungsi pertambahan yang dinotasikan $F = a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + \cdots + a_nk_n$ dengan a_i adalah kontanta dan nilai k dapat diperoleh dengan cara berikut:

$k_1 = f(x_i, y_i)$
$k_2 = f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h)$
$k_3 = f(x_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h)$
$\vdots$
$k_n = f(x_i + p_{n-1}h, y_i + q_{n-1,1}k_1h + q_{n-1,2}k_2h + \cdots +$
$q_{n-1,n-1}k_{n-1}h)$

Nilai p dan q diperoleh dengan menyamakan persamaan 6.3 dengan suku-suku deret Taylor.

Tipe-tipe metode Runge Kutta bergantung pada nilai n yang merupakan orde Runge Kutta.Untuk $n = 1$, metode Runge Kutta dikenal dengan metode Euler. Metode Runge Kutta yang banyak digunakan dalam menentukan solusi persamaan diferensial adalah metode Runge Kutta orde 4 dengan bentuk umum sebagai berikut:

$$\boldsymbol{y(x_{i+1}) = y(x_i) + h\left[\frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\right]}$$

(6.4)

dengan,

$\boldsymbol{k_1 = f(x_i, y_i)}$

$\boldsymbol{k_2 = f(x_i + 0,5h, y_i + 0,5k_1h)}$

$\boldsymbol{k_3 = f(x_i + 0,5h, y_i + 0,5k_2h)}$

$\boldsymbol{k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3h)}$

Contoh:

1) Gunakan metode Runge Kutta orde 4 untuk menentukan solusi numerik dari PD orde satu $\frac{dy}{dx} = \sin x$, dimana $0 \leq x \leq 4; y(0) = 1$ dengan $h = 0,5$

Solusi.

✓ Diketahui bahwa: $f(x_i, y_i) = \sin x$

✓ Lebar tiap titik data: $h = 0,5$

✓ Titik-titik iterasi:

$x_i = x_0 + i.h \leftrightarrow x_0 = 0$

$\leftrightarrow x_1 = x_0 + (1 \times 0,5) = 0 + 0,5 = 0,5$

$\leftrightarrow x_2 = x_0 + (2 \times 0,5) = 0 + 1 = 1$

$\leftrightarrow x_3 = x_0 + (3 \times 0,5) = 0 + 1,5 = 1,5$

$\leftrightarrow x_4 = x_0 + (4 \times 0,5) = 0 + 2 = 2$

$\leftrightarrow x_5 = x_0 + (5 \times 0,5) = 0 + 2,5 = 2,5$

$\leftrightarrow x_6 = x_0 + (6 \times 0,5) = 0 +$
$3 = 3$
$\leftrightarrow x_7 = x_0 + \left(7 \times \frac{1}{2}\right) = 0 +$
$3,5 = 3,5$
$\leftrightarrow x_8 = x_0 + (8 \times 0,5) = 0 +$
$4 = 4$

✓ Perhitungan nilai $y(x_{i+1})$ untuk $i = 0$ dilakukan dengan mencari nilai k terlebih dahulu, yakni:

$k_1 = f(x_0, y_0) = f(0,1) = \sin 0 = 0$
$k_2 = f(x_0 + 0,5h, y_0 + 0,5k_1h)$
$= f\big(0 + (0,5.0,5), 1 + (0,5.0.0,5)\big)$
$= f(0,25,1)$
$= \sin 0,25 = 0,25$
$k_3 = f(x_0 + 0,5h, y_0 + 0,5k_2h)$
$= f\big(0 + (0,5.0,5), 1 + (0,5.0,25.0,5)\big)$
$= f(0,25,1,06)$
$= \sin 0,25 = 0,25$
$k_4 = f(x_0 + h, y_0 + k_3h)$
$= f\big(0 + 0,5,1 + (0,25.0,5)\big)$
$= f(0,5,0,125)$
$= \sin 0,5 = 0,48$

Sehingga diperoleh:

$y(x_1) = y(x_0) + h\left[\frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\right]$

$y(x_1) = y(0{,}5) = y_1 = 1 + 0{,}5\left[\frac{1}{6}(0 + (2.0{,}25) + (2.0{,}25) + 0{,}48)\right]$

$y(x_1) = y(0{,}5) = y_1 = 1 + 0{,}5\left[\frac{1}{6}(0 + (2.0{,}25) + (2.0{,}25) + 0{,}48)\right] = 1{,}12$

✓ Penghitung nilai $y(x_{i+1})$ untuk $i = 1$ dilakukan dengan mencari nilai k terlebih dahulu, yakni:

$k_1 = f(x_1, y_1) = f(0{,}5{,}1{,}12) = \sin 0{,}5 = 0{,}48$

$k_2 = f(x_1 + 0{,}5\Delta x, y_1 + 0{,}5k_1\Delta x)$

$= f\big(0{,}5 + (0{,}5.0{,}5), 1{,}12 + (0{,}5.0{,}48.0{,}5)\big)$

$= f(0{,}125{,}1{,}24) = \sin 0{,}125 = 0{,}68$

$k_3 = f(x_1 + 0{,}5\Delta x, y_1 + 0{,}5k_2\Delta x)$

$= f\big(0{,}5 + (0{,}5.0{,}5), 1{,}12 + (0{,}5.0{,}68.0{,}5)\big)$

$= f(0{,}125{,}1{,}29) = \sin 0{,}125 = 0{,}68$

$k_4 = f(x_1 + h, y_1 + k_3 h)$

$= f\big(0{,}5 + 0{,}5{,}1{,}12 + (0{,}68.0{,}5)\big)$

$= f(1{,}1{,}46) = \sin 1 = 0{,}84$

Sehingga diperoleh:

$y(x_2) = y(x_1) + h\left[\frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\right]$

$y(x_2) = y(1) = y_2 = 1{,}12 + 0{,}5\left[\frac{1}{6}(0{,}48 + (2.0{,}68) + (2.0{,}68) + 0{,}84)\right] = 1{,}46$

Penghitungan galat dilakukan dengan menggunakan rumus galat relatif:

$$|\varepsilon_t| = \left|\frac{\text{nilai eksak} - \text{nilai hampiran}}{\text{nilai eksak}}\right| \times 100\%$$

Proses perhitungan diteruskan sehingga diperoleh hasil berikut:

i	x_i	k_1	k_2	k_3	k_4	y_i	y_{eksak}	Galat (%)
0	0	0	0,247404	0,247404	0,479426	1	1	0
1	0,5	0,479426	0,681639	0,681639	0,841471	1,12242	1,122417	0,000238
2	1	0,841471	0,948985	0,948985	0,997495	1,459708	1,459698	0,000689
3	1,5	0,997495	0,983986	0,983986	0,909297	1,929283	1,929263	0,001053
4	2	0,909297	0,778073	0,778073	0,598472	2,416178	2,416147	0,001281
5	2,5	0,598472	0,381661	0,381661	0,14112	2,801183	2,801144	0,001406
6	3	0,14112	-0,1082	-0,1082	-0,35078	2,990036	2,989992	0,001455
7	3,5	-0,35078	-0,57156	-0,57156	-0,7568	2,936499	2,936457	0,001442
8	4	-0,7568	-0,89499	-0,89499	-0,97753	2,65368	2,653644	0,001362

RANGKUMAN

1. Penentuan solusi persamaan diferensial secara numerik dilakukan dengan menggunakan kemiringan kurva.
2. Metode Euler adalah salah satu metode numerik untuk menentukan solusi persamaan diferensial orde satu yang menghampiri turunan dalam persamaan diferensial dengan suatu turunan numerik, yakni $\frac{dy}{dx} \approx f(x_i, y_i)$. Rumus metode Euler adalah $y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + h.f(x_i, y_i)$ dimana $h = \frac{x_n - x_0}{n}$ dan $y(x_i) = y_i$ adalah hampiran nilai y di $x_i$untuk $i = 0,1,2, \ldots.$ Galat metode Euler dapat ditentukan dengan rumus $\varepsilon_t = \frac{h^2}{2} y''(c_n)$ dengan $x_i \leq c \leq x_{i+1}$ maupun dengan menerapkan rumus galat relatif.
3. Metode Runge Kutta adalah metode yang memberikan ketelitian hasil yang lebih baik dibandingkan metode Euler. Formula metode Runge Kutta adalah $y(x_{i+1}) = y(x_i) + h.F(x_i, y_i; h)$ dimana $F(x_i, y_i; h)$ adalah fungsi pertambahan yang dinotasikan $F = a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3 + \cdots + a_n k_n$ dengan a_i adalah kontanta dan nilai k dapat diperoleh dengan cara berikut:
   $k_1 = f(x_i, y_i)$

$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$
$k_3 = f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h)$
$\vdots$
$k_n = f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \cdots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h)$

4. Metode Runge Kutta orde 4 dirumuskan dengan
$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h\left[\frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\right]$
dengan nilai k adalah:
$k_1 = f(x_i, y_i)$
$k_2 = f(x_i + 0{,}5h, y_i + 0{,}5k_1 h)$
$k_3 = f(x_i + 0{,}5h, y_i + 0{,}5k_2 h)$
$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h)$

LATIHAN

1. Pertimbangkan masalah menentukan nilai uang saat ini dan akan datang dengan menggunakan suku bunga. Misalkan pada saat $t = 0$ didepositokan uang sebesar 1000 dolar dengan tingkat suku bunga 7%. Kita ingin mengetahui berapa jumlah uang pada saat $t = 20$. Bila *Q(t)*adalah jumlah uang pada saat tahun ke-*t*. Maka tingkat perubahan *Q(t)* adalah: $\frac{dQ}{dt} = 0{,}07Q$ dengan $Q(0) = 1000$ dolar dan $0 \leq t \leq 20$
   a) Tentukan solusi analitik
   b) Tentukan solusinya menggunakan metode euler dengan menggunakan $\Delta t = 1$
   c) Tentukan solusinya menggunakan metode euler dengan menggunakan $\Delta t = 10$
   d) Simpulkan hasil yang diperoleh

2) Gunakan metode Runge Kutta orde 4 untuk menentukan solusi numerik dari PD orde satu $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{2}$, dimana $0 \leq x \leq 3; y(0) = 1$ dengan $h = 0{,}5$ dan $h = 0{,}25$. Bandingkan hasil yang diperoleh.

3) Gunakan metode Euler dan metode Runge Kutta orde 4 untuk menentukan solusi numerik dari PD orde satu $\frac{dy}{dx} = y - x^2 + 1$, dimana $0 \leq x \leq 2; y(0) = 0{,}5; n = 10$. Bandingkan hasil yang diperoleh.

Daftar Pustaka

Bartle, R. Gdan D. R. Sherbert. 2000.*Introduction to Real Analysis, 3rd edition.* John Wiley & Sons.

Dalziel, Stuart. 1998. *Numerical Methods*. *Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics University of Cambridge*. Diakses pada http://www.damtp.cam.ac.uk/user/fdl/people/sd 103/lectures/

Irwanto. 2012. *Deret Taylor dan Analisis Galat*. Yogyakarta: Fakultas Sains dan Teknologi Jurusan Teknik Informatika Universitas Teknologi Yogyakarta.

Kaw, Autar. 2011. *Textbook Notes of Introduction to Numerical Methods*. Diakses pada http://numericalmethods.eng.usf.edu.

Larson, Ron., David C. Falvo. 2009. *Elementary Linear Algebra*. Boston: Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company.

Nugroho, Didit Budi. 2009. *Metode numerik*. Program Studi Matematika Universitas Kristen Satya Wacana.

Sastry, S.S. 2006. *Introductory Methods of Numerical Analysis*. New Delhi: Prentice Hall.

Scheid, Francis. J.1989. *Schaum's Outline of Theory and Problems Numerical Analysis Second Edition*. New York: McGraw Hill.

Setiawan, Agus. 2006. *Pengantar Metode Numerik.* Yogyakarta: Penerbit ANDI.

Tresnaningsih, Rizqi. 2010. *Modul Mata Kuliah Analisis Numerik.* Madiun: Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Pendidikan Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam IKIP PGRI Madiun.

Triatmodjo, Bambang. 1992. Metode Numerik. Yogyakarta: Beta Offset.

INDEKS

Glosarium

Cases

Bisection Method : metode bagi dua	9
error : galat	3
False Position Method : metode posisi palsu	9
finite divided diference : beda terbagi hingga	65
inherent error : galat melekat; galat bawaan	3
Newton-Raphson : metode Newton Raphson	9
pivot : poros	42
polinomial : suku banyak	56
round-of error : galat pembulatan	3
Secant Method : metode sekan: metode garis potong	9
truncation error : galat pemotongan	3

Profil Penulis

Ni Kadek Rini Purwati lahir pada bulan September 1987 di Amlapura, Karangasem. Lulus pendidikan sarjana S1 pada tahun 2009 di Program Studi Matematika Universitas Udayana, lulus pendidikan pascasarjana pada tahun 2011 di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Pendidikan Ganesha. Saat ini penulis berprofesi sebagai dosen tetap Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Unvesitas Mahadewa Indonesia. Penulis aktif dalam penelitian yang ditunjukkan dengan dua kali memeperoleh hibah Penelitian Dosen Pemula dari DRPM Risbang Ristekdikti. Artikel hasil penelitian penulis telah diterbitkan di beberapa jurnal ilmiah, diantaranya pada jurnal nasional terakreditasi (Jurnal Emasains, Jurnal Pendidikan Indonesia) dan jurnal internasional terindeks scopus (Journal of Physics: Conference Series).

Ni Ketut Erawati adalah anak keempat dari empat bersaudara yang lahir pada 2 Agustus 1986 di Ketewel, Sukawati. Penulis adalah anak asli Bali yang lahir dari pasangan I Nyoman Wangaya dan Ni Wayan Rumet. Penulis menamatkan ijasah S1 matematika di Universitas Udayana dan S2 pendidikan matematika di Unversitas Pendidikan Ganesha. Ketertarikan pada dunia pendidikan muncul setelah menamatkan sarjana, sehingga berharap dapat berkontribusi pada masyarakat melalui pendidikan. Pekerjaan sebagai dosen di Universitas Mahadewa Indonesia (eks IKIP PGRI Bali) membuat penulis juga aktif dalam penelitian serta menerbitkan artikel di jurnal nasional dan internasional.